

2015年工学部第2問

2 初項1, 公差3の等差数列 $\{a_n\}$ と, 一般項が $b_n = \left[\frac{2n+2}{3} \right]$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ がある. ここで, 実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す. たとえば, $b_1 = \left[\frac{4}{3} \right] = 1$, $b_2 = [2] = 2$, $b_3 = \left[\frac{8}{3} \right] = 2$ である. 数列 $\{a_n\}$ を次のように, b_1 個, b_2 個, b_3 個, \dots の群に分け, 第 k 群には b_k 個の数が入るようにする.

a_1	a_2, a_3	a_4, a_5	a_6, \dots
第1群	第2群	第3群	...

第 k 群の最初の数を c_k とする. 次に答えよ.

- (1) 自然数 m に対して, b_{3m-2} , b_{3m-1} , b_{3m} をそれぞれ m の多項式で表せ. また, 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 $3m$ 項までの和 S_{3m} を求めよ.
- (2) 自然数 m に対して, c_{3m-2} , c_{3m-1} , c_{3m} をそれぞれ m の多項式で表せ. また, 数列 $\{c_k\}$ の初項から第 $3m$ 項までの和 T_{3m} を求めよ.
- (3) 1000 は第何群の何番目の数か.
- (4) $x \geq 1$ のとき $\sqrt{x^2+1} < x + \frac{1}{2}$ であることを用いて, 次の不等式が成り立つことを示せ. ただし, m は自然数とする.

$$\sum_{k=1}^{3m} (\sqrt{c_k} - k) < \frac{m}{2}$$