



2010年 医学部 第3問

3 微分可能な関数  $y = f(x)$  が次の方程式を満たすとする。

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f^{(1)}(x) + a_0 f(x) = 0 \quad (\text{A})$$

ここに  $n$  は自然数,  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) は実数の定数で,  $a_n \neq 0$  である。また,  $y^{(k)} = f^{(k)}(x)$  は  $f(x)$  の  $k$  次導関数で  $y^{(0)} = f^{(0)}(x) = f(x)$  とする。(A) のような方程式を第  $n$  階微分方程式といい, (A) に対して  $t$  の  $n$  次方程式

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0 \quad (\text{B})$$

を (A) の特性方程式という。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 特性方程式 (B) の解が実数  $r$  であるとき, 関数  $y = e^{rx}$  が方程式 (A) を満たすことを証明せよ。
- (2)  $n$  次方程式 (B) が実数  $r$  を  $k$  重解<sup>(注)</sup> にもつとき, 次の  $t$  に関する方程式は  $r$  を  $k-1$  重解にもつことを証明せよ。ただし,  $k = 2, 3, \dots$  とする。

$$na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 = 0$$

(注)  $t$  の  $m$  次方程式が適当な多項式  $Q(t)$  を用いて  $(t-r)^k Q(t) = 0$  となるとき,  $t=r$  をこの方程式の  $k$  重解と定義する。ただし,  $k = 1, 2, \dots$  とする。

- (3) 実数の定数  $r$  に対して  $x$  の関数を  $y_i = x^i e^{rx}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) とする。このとき,  $y_j^{(n)}$  を  $x$ ,  $y_{j-1}^{(n-1)}$  および  $y_{j-1}^{(n)}$  を用いて表せ。ただし,  $j = 1, 2, 3, \dots$  とする。
- (4) 実数  $r$  が  $n$  次方程式 (B) の  $k$  重解であるとき  $y_i = x^i e^{rx}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ ) が微分方程式 (A) を満たすことを証明せよ。ただし,  $k$  は自然数とする。