京都工芸繊維大学

2014年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=e^{-\sqrt{3}x}(1-\cos x)$ を考える．自然数 n に対し，区間 $2(n-1)\pi \leqq x \leqq 2n\pi$ における関数 $f(x)$ の最大値を A_n とする．

(1) A_1 を求めよ．

(2) 自然数 n に対し，A_n を n を用いて表せ．

(3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ の和を求めよ．

(1) $f'(x) = -\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}x}(1-\cos x) + e^{-\sqrt{3}x}\cdot\sin x$

$= 2\underbrace{e^{-\sqrt{3}x}}_{>0}\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$n=1$ のとき．$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より．$f'(x)=0$ となるのは．$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ 2\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

∴ 増減表より．$\underline{A_1 = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi}}$ //

(2) (1)と同様に．$f'(x)=0$ となるのは．

$x = 2(n-1)\pi,\ \left\{2(n-1)+\frac{1}{3}\right\}\pi,\ 2n\pi$

x	$2(n-1)\pi$	$\cdots$	$\left\{2(n-1)+\frac{1}{3}\right\}\pi$	$\cdots$	$2n\pi$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

∴ 増減表より．

$A_n = f\left(2(n-1)\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{3}\cdot\left\{2(n-1)\pi+\frac{\pi}{3}\right\}}$

$\underline{= \frac{1}{2}e^{\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi-2n\sqrt{3}\pi}}$ //

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{1}{2}e^{\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-2\sqrt{3}\pi}\right)^n$

初項 $e^{-2\sqrt{3}\pi}$，公比 $e^{-2\sqrt{3}\pi}$ の等比数列の和．

0<(公比)<1 より収束．

$= \frac{1}{2}e^{\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi}\cdot\frac{e^{-2\sqrt{3}\pi}}{1-e^{-2\sqrt{3}\pi}}$

$\underline{= \frac{e^{\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi}}{2\left(e^{2\sqrt{3}\pi}-1\right)}}$ //