0000373366269999

山口大学

2010年第1問

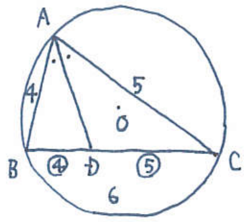
数理 石井K

$\boxed{1}$ 3辺が AB = 4, BC = 6, CA = 5 である △ABC の外心を O, ∠A の2等分線と辺 BC との交点を D とする. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき, 次の問いに答えなさい.

(1) △ABC の外接円の半径を求めなさい.

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めなさい.

(3) OB ⊥ AD を示しなさい.



(1) 余弦定理より, $6^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cos A$

$\therefore \cos A=\frac{1}{8}$　$0°<A<180°$ より $\sin A>0$ なので $\sin A=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\therefore$ 正弦定理より, $\dfrac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=2R$　$\therefore \underline{R=\frac{8\sqrt{7}}{7}}$ //

(2) 余弦定理より, $4^2=5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cos C$

$\therefore \cos C=\frac{3}{4}$　$0°<C<180°$ より $\sin C>0$ なので $\sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$

円周角と中心角の関係より. $\angle AOB=2\angle C$　$\therefore \cos\angle AOB=\cos 2\angle C=\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle AOB=R^2\cdot\frac{1}{8}$　$\therefore \underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{8}{7}}$ //

同様に, $\angle BOC=2\angle A$　$\therefore \cos\angle BOC=\cos^2A-\sin^2A=\left(\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)^2=\frac{-31}{32}$

$\therefore \vec{b}\cdot\vec{c}=\left(\frac{8\sqrt{7}}{7}\right)^2\cdot\left(-\frac{31}{32}\right)=\underline{-\frac{62}{7}}$ //

(3) $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$ より. ($\because$ BD : DC = 4 : 5 より)

$\overrightarrow{OD}-\vec{a}=\frac{5}{9}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}-\vec{a}$　$\therefore \overrightarrow{OD}=\frac{5}{9}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AD}&=\vec{b}\cdot(\overrightarrow{OD}-\vec{a})\\&=\vec{b}\cdot\left(-\vec{a}+\frac{5}{9}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}\right)\\&=-\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{5}{9}|\vec{b}|^2+\frac{4}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=-\frac{8}{7}+\frac{5}{9}\cdot\frac{64}{7}+\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{62}{7}\right)\\&=0\end{aligned}$$

したがって. $\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{AD}\neq0$ より

$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AD}$ が成り立つ ▨