

2016年 理工学部 第4問

4 i を虚数単位とする。次の事実がある。

事実 F

a, b を互いに素な正の整数とする。このとき、

$$\left(\cos \frac{2a}{b} \pi + i \sin \frac{2a}{b} \pi \right)^k = \cos \frac{2}{b} \pi + i \sin \frac{2}{b} \pi$$

となる整数 k が存在する。

(1) 等式

$$\left(\cos \frac{4}{5} \pi + i \sin \frac{4}{5} \pi \right)^k = \cos \frac{2}{5} \pi + i \sin \frac{2}{5} \pi$$

を満たす最小の正の整数 k は である。

(2) a, b を互いに素な正の整数とし、集合 P を

$$P = \left\{ z \mid z \text{ は整数 } k \text{ を用いて } \left(\cos \frac{2a}{b} \pi + i \sin \frac{2a}{b} \pi \right)^k \text{ と表される複素数} \right\}$$

で定める。事実 F を考慮すると、集合 P の要素の個数 $n(P)$ は である。

(3) 事実 F を証明しなさい。

(4) a_1, b_1 を互いに素な正の整数とし、 a_2, b_2 も互いに素な正の整数とする。集合 Q_1 と Q_2 を

$$Q_1 = \left\{ z \mid z \text{ は整数 } k \text{ を用いて } \left(\cos \frac{2a_1}{b_1} \pi + i \sin \frac{2a_1}{b_1} \pi \right)^k \text{ と表される複素数} \right\}$$

$$Q_2 = \left\{ z \mid z \text{ は整数 } k \text{ を用いて } \left(\cos \frac{2a_2}{b_2} \pi + i \sin \frac{2a_2}{b_2} \pi \right)^k \text{ と表される複素数} \right\}$$

で定め、集合 R を

$$R = \{ z \mid z \text{ は集合 } Q_1 \text{ の要素と集合 } Q_2 \text{ の要素の積で表される複素数} \}$$

で定める。 b_1 と b_2 が互いに素ならば、集合 R の要素の個数 $n(R)$ は である。 b_1 と b_2 が互いに素でないとき、それらの最大公約数を d とすれば、集合 R の要素の個数 $n(R)$ は である。