0001717902828999

金沢大学

2014 年 文系 第 1 問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 放物線 $C : y = x^2 + 2x$ 上の 2 点 $(a,\ a^2+2a)$，$(b,\ b^2+2b)$ における接線をそれぞれ ℓ_a，ℓ_b とするとき，次の問いに答えよ．ただし，$a < b$ とする．

(1) 2 直線 ℓ_a，ℓ_b の方程式を求めよ．また，ℓ_a と ℓ_b の交点の x 座標を求めよ．

(2) 放物線 C と 2 直線 ℓ_a，ℓ_b とで囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(3) 2 直線 ℓ_a，ℓ_b が垂直に交わるように a，b が動くとき，a，b がみたす関係式を求めよ．また，そのときの面積 S の最小値とそれを与える a，b の値を求めよ．

(1) $y' = 2x+2$ より．$\ell_a : y = (2a+2)(x-a) + a^2 + 2a$

$\therefore$ $\underline{\ell_a : y = 2(a+1)x - a^2}$ 同様にして．$\underline{\ell_b : y = 2(b+1)x - b^2}$ //

交点の x 座標を求めると．$2(a+1)x - a^2 - 2(b+1)x + b^2 = 0$

$\therefore\ 2(a-b)x - (a+b)(a-b) = 0$

$(a-b)\{2x - (a+b)\} = 0$ $a<b$ より．$\underline{x = \dfrac{a+b}{2}}$ //

(2)

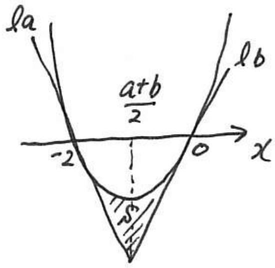
$$S = \int_a^{\frac{a+b}{2}} x^2 + 2x - 2(a+1)x + a^2\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} x^2 + 2x - 2(b+1)x + b^2\,dx$$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} x^2 - 2ax + a^2\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} x^2 - 2bx + b^2\,dx$$

$$= \left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \left[\frac{(x-b)^3}{3}\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

$$= \underline{\frac{1}{12}(b-a)^3}\ //$$



(3) (1) より．$4(a+1)(b+1) = \underline{-1}$ (*) $\therefore$ $\underline{ab + a + b + \frac{5}{4} = 0}$ //

(*) 式より．$a+1 \neq 0$ なので両辺を $4(a+1)$ で割ると．$b+1 = -\dfrac{1}{4(a+1)}$

$\therefore\ b - a = -(a+1) - \dfrac{1}{4(a+1)}$

$\geqq 2\sqrt{-(a+1)\cdot\left\{-\dfrac{1}{4(a+1)}\right\}}$

$= 1$

相加平均・相乗平均の関係を使った

$\therefore$ S の最小値は $\underline{S_{min} = \frac{1}{12}}$ //

また，このとき，

$-(a+1) = -\dfrac{1}{4(a+1)}$

すなわち $4(a+1)^2 = 1$ $\therefore$ $\underline{a = -\frac{3}{2},\ b = -\frac{1}{2}}$ //

$a<b$ より