

2014年工学部第3問

3 a を実数とし

$$f(x) = \int_1^x (t-a)(t-x) dt$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
 (2) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ。
 (3) $f(x)$ の極値を a の範囲によって分けて求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) f(x) &= \int_1^x t^2 - (a+x)t + ax \, dt \\
 &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{a+x}{2} t^2 + ax t \right]_1^x \\
 &= \frac{x^3}{3} - \frac{a+x}{2} x^2 + ax^2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{a+x}{2} + ax \right) \\
 &= \underline{\underline{-\frac{1}{6}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + \left(\frac{1}{2} - a\right)x + \frac{a}{2} - \frac{1}{3}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) f'(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + ax + \frac{1}{2} - a \\
 &= (x-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x+1-2a)
 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(x) = 0 \text{ とするときは } \underline{\underline{x=1, 2a-1}}$$

(3) (i) $a > 1$ のとき(ii) $a < 1$ のとき(iii) $a = 1$ のとき

x	...	1	...	$2a-1$...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	0	↗		↘

極小

$$\left(\frac{2}{3}a^3 - 2a^2 + 2a - \frac{2}{3} \right)$$

極大

x	...	$2a-1$...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘		↗	0	↘

極小

極大

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	↘		↘

$$\therefore \begin{cases}
 a > 1 \text{ のとき} & \text{極小値 } 0 (x=1), \text{ 極大値 } \frac{2}{3}a^3 - 2a^2 + 2a - \frac{2}{3} (x=2a-1) \\
 a < 1 \text{ のとき} & \text{極小値 } \frac{2}{3}a^3 - 2a^2 + 2a - \frac{2}{3} (x=2a-1), \text{ 極大値 } 0 (x=1) \\
 a = 1 \text{ のとき} & \text{極値なし} \quad \underline{\underline{\quad}}
 \end{cases}$$