0002010549897999

九州工業大学

2015年 情報工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ n を自然数とし，関数 $f_m(x)$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を次のように定める．

$$f_m(x)=\begin{cases}1 & (m=0)\\ x^m & (m\geqq 1)\end{cases}$$

さらに，a_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を次のように定める．

$$a_k=\int_{-1}^{1}f_k(1-x)f_{n-k}(1+x)\,dx$$

以下の問いに答えよ．

(1) a_0 と a_1 をそれぞれ n を用いて表せ．

(2) $k\geqq 1$ のとき，a_k を $n,\ k,\ a_{k-1}$ を用いて表せ．

(3) a_k を $n,\ k$ を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}$ を n を用いて表せ．

(1)
$$a_0=\int_{-1}^{1}f_0(1-x)f_n(1+x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}1\cdot(1+x)^n\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\right]_{-1}^{1}$$
$$=\underline{\frac{2^{n+1}}{n+1}}\,/\!/$$

$$a_1=\int_{-1}^{1}f_1(1-x)f_{n-1}(1+x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(1-x)(1+x)^{n-1}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(1-x)\left\{\frac{(1+x)^n}{n}\right\}'dx$$
$$=\left[(1-x)\cdot\frac{(1+x)^n}{n}\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^n}{n}\,dx$$
$$=\left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n(n+1)}\right]_{-1}^{1}$$
$$=\underline{\frac{2^{n+1}}{n(n+1)}}\,/\!/$$

(2)
$$a_k=\int_{-1}^{1}(1-x)^k(1+x)^{n-k}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(1-x)^k\left\{\frac{(1+x)^{n-k+1}}{n-k+1}\right\}'dx$$
$$=\left[(1-x)^k\cdot\frac{(1+x)^{n-k+1}}{n-k+1}\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}k(1-x)^{k-1}\cdot\frac{(1+x)^{n-k+1}}{n-k+1}\,dx$$
$$=\frac{k}{n-k+1}\int_{-1}^{1}f_{k-1}(1-x)f_{n-k+1}(1+x)\,dx$$
$$=\underline{\frac{k}{n-k+1}\cdot a_{k-1}}\,/\!/$$

(3) (2)の結果をくり返し使って，

$$a_k=\frac{k}{n-k+1}\cdot\frac{k-1}{n-k+2}\cdot\frac{k-2}{n-k+3}\cdot\cdots\cdots\frac{1}{n}\cdot a_0$$
$$=\frac{k!(n-k)!}{n!}\cdot\frac{2^{n+1}}{n+1}$$
$$=\underline{\frac{2^{n+1}}{(n+1)\,{}_nC_k}}\,/\!/$$

(4) (3)より，
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k$$
$$=\underline{\frac{n+1}{2}}\,/\!/$$

二項定理より，$(x+y)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,x^k y^{n-k}$

これに $x=y=1$ を代入して，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k=2^n$