香川大学

2012年 医学部 第2問　1枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 楕円 C_1 : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ および双曲線 C_2 : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について，次の問に答えよ．ただし，$a>0$, $b>0$ とする．

(1) 楕円 C_1 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

であることを示せ．

(2) 楕円 C_1 の外部の点 $(p,\ q)$ を通る C_1 の2本の接線の接点をそれぞれ $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$ とする．直線 $\mathrm{A_1A_2}$ の方程式は

$$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$$

であることを示せ．

(3) $(p,\ q)$ が双曲線 C_2 上の点であるとき，直線 $\dfrac{px}{a^2}+\dfrac{qy}{b^2}=1$ は C_2 に接することを示せ．

(1) 楕円の方程式の両辺を x で微分して，$\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2y}{b^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x}{y}$　$\therefore$ 接線は，$y=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1)+y_1$ $(y_1\neq 0$ のとき$)$

$\therefore\ \dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}$　…①

ここで，(x_1,y_1) は C_1 上の点なので，$\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$

これを①に代入して，$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$　…②

$y_1=0$ のときは $(x_1,y_1)=(\pm a,0)$ で接線は $x=\pm a$　これは②に含まれる ■

(2) $A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$ とおくと (1) より，接線はそれぞれ

$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$，$\dfrac{x_2x}{a^2}+\dfrac{y_2y}{b^2}=1$　これらが (p,q) を通るので

$\dfrac{x_1p}{a^2}+\dfrac{y_1q}{b^2}=1$，$\dfrac{x_2p}{a^2}+\dfrac{y_2q}{b^2}=1$

これは，A_1，A_2 が直線 $\dfrac{px}{a^2}+\dfrac{qy}{b^2}=1$ 上にあることを表している

$\therefore$ A_1A_2 の方程式は，$\dfrac{px}{a^2}+\dfrac{qy}{b^2}=1$ ■

00000446093559999

香川大学

2012年 医学部 第2問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 楕円 C_1 : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ および双曲線 C_2 : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について，次の問に答えよ．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．

(1) 楕円 C_1 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

であることを示せ．

(2) 楕円 C_1 の外部の点 $(p,\ q)$ を通る C_1 の2本の接線の接点をそれぞれ A_1，A_2 とする．直線 A_1A_2 の方程式は

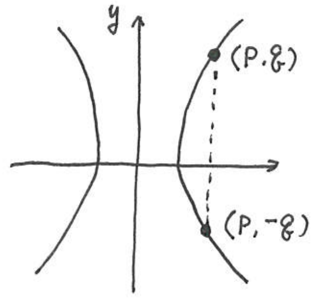
$$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$$

であることを示せ．

(3) $(p,\ q)$ が双曲線 C_2 上の点であるとき，直線 $\dfrac{px}{a^2}+\dfrac{qy}{b^2}=1$ は C_2 に接することを示せ．

(3) C_2 上の点 (x_1, y_1) における接線は．

$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ である．



また，(p, q) が C_2 上の点 $\Longleftrightarrow$ $(p, -q)$ が C_2 上の点

であるから．

$(p, -q)$ における接線を求めると．

$$\frac{px}{a^2}-\frac{(-q)y}{b^2}=1$$

よって，$\dfrac{px}{a^2}+\dfrac{qy}{b^2}=1$ は 点 $(p, -q)$ において C_2 に接する ▨