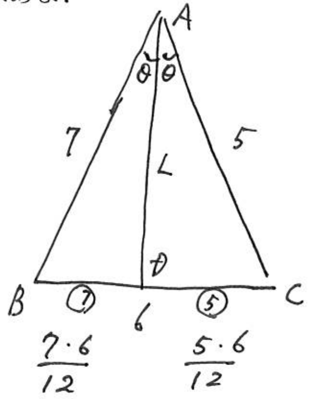
自治医科大学

2012年 第15問

15 辺BC，CA，ABのそれぞれの長さが，6，5，7となる三角形ABCについて考える．∠Aの二等分線と辺BCの交点をDとし，線分ADの長さをLとするとき，$\frac{12L}{\sqrt{105}}$の値を求めよ．



~~$\triangle ABD : \triangle ADC$~~

~~$= \frac{1}{2}\cdot 7\cdot L\cdot \sin\theta : \frac{1}{2}\cdot L\cdot 5\cdot \sin\theta$~~

~~$= 7 : 5$~~

余弦定理より

$$\left(\frac{7}{2}\right)^2 = 7^2 + L^2 - 2\cdot 7\cdot L\cdot \cos\theta$$

$$-)\ \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 5^2 + L^2 - 2\cdot 5\cdot L\cos\theta$$

$$\frac{49-25}{4} = 49 - 25 - 4L\cos\theta$$

$18 = 4L\cos\theta$

$$6 = 24 - 4L\cos\theta$$

$$\therefore L\cdot\cos\theta = \frac{9}{2}$$

$49 + 25 = 74$, $74 - 36 = 38$

また，$6^2 = 7^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 7\cdot \cos 2\theta$

$$\therefore -38 = -70\cos 2\theta$$

$$\therefore \cos 2\theta = \frac{19}{35}$$

$12L^2 = 35\cdot 9$

$4L^2 = 35\cdot 3$

$L^2 = \frac{105}{4}$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より

$$\frac{19}{35} = 2\cdot\left(\frac{9}{2L}\right)^2 - 1$$

$$\therefore \frac{54}{35} = \frac{81}{2L^2}$$

$108L^2 = 35\cdot 81$　　$L = \frac{\sqrt{105}}{2}$

$$\therefore \frac{12L}{\sqrt{105}} = 6$$