

東京大学

2014年理系第3問

3 u を実数とする。座標平面上の2つの放物線

$$C_1: y = -x^2 + 1$$

$$C_2: y = (x - u)^2 + u$$

を考える。 C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は、ある実数 a, b により、 $a \leq u \leq b$ と表される。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) u が $a \leq u \leq b$ をみたすとき、 C_1 と C_2 の共有点を $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ とする。ただし、共有点が1点のみのときは、 P_1 と P_2 は一致し、ともにその共有点を表すとする。

$$2|x_1y_2 - x_2y_1|$$

を u の式で表せ。

(3) (2) で得られる u の式を $f(u)$ とする。定積分

$$I = \int_a^b f(u) du$$

を求めよ。