広島大学

2015年 理系 第1問　　1枚目／2枚

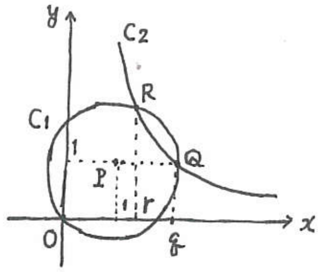
1 座標平面上の点P(1, 1)を中心とし，原点Oを通る円をC_1とする．kを正の定数として，曲線$y=\dfrac{k}{x}$ $(x>0)$をC_2とする．C_1とC_2は2点で交わるとし，その交点をQ，Rとするとき，直線PQはx軸に平行であるとする．点Qのx座標をqとし，点Rのx座標をrとする．次の問いに答えよ．

(1) k，q，rの値を求めよ．

(2) 曲線C_2と線分OQ，ORで囲まれた部分の面積Sを求めよ．

(3) $x=1+\sqrt{2}\sin\theta$とおくことにより，定積分$\displaystyle\int_r^q\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$の値を求めよ．

(4) 円C_1の原点Oを含まない弧QRと曲線C_2で囲まれた図形を，x軸のまわりに1回転してできる回転体の体積Vを求めよ．



(1) $C_1:(x-1)^2+(y-1)^2=2$

PQ // x軸より．$Q\left(q,\dfrac{k}{q}\right)$ の y座標は．$\dfrac{k}{q}=1$　…①

また，QはC_1上の点でもあるので

$(q-1)^2+0^2=2$　$\therefore q=1\pm\sqrt{2}$　$q>0$より　$\underline{q=1+\sqrt{2}}$ //

①に代入して．$\underline{k=1+\sqrt{2}}$ //

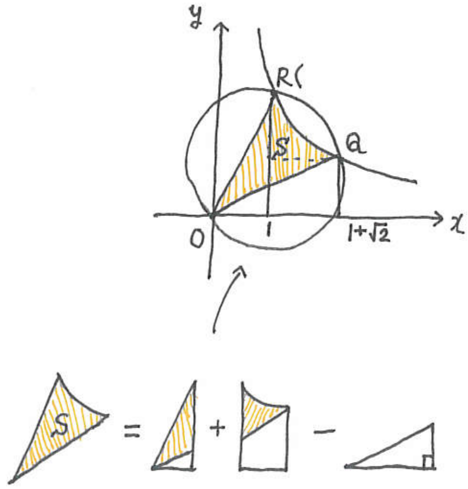
~~$C_2: y=\dfrac{1+\sqrt{2}}{x}$ より $R\left(r,\dfrac{1+\sqrt{2}}{r}\right)$ と表せる~~

点Rは直線 $y=x$ に関して点Qと対称な点なので，$R(1,1+\sqrt{2})$　$\therefore \underline{r=1}$ //

(2) $S=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot(1+\sqrt{2})+\displaystyle\int_1^{1+\sqrt{2}}\dfrac{1+\sqrt{2}}{x}\,dx-\dfrac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})\cdot1$

$=\Big[(1+\sqrt{2})\log x\Big]_1^{1+\sqrt{2}}$

$=\underline{(1+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2})}$ //



(3) $dx=\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$，

x	$1\to1+\sqrt{2}$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ (与式) $=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(1-\sin^2x)}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

$=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

2枚目へつづく

広島大学

2015年 理系 第1問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 座標平面上の点 P(1, 1) を中心とし，原点 O を通る円を C_1 とする．k を正の定数として，曲線 $y=\dfrac{k}{x}$ ($x>0$) を C_2 とする．C_1 と C_2 は 2 点で交わるとし，その交点を Q，R とするとき，直線 PQ は x 軸に平行であるとする．点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする．次の問いに答えよ．

(1) k, q, r の値を求めよ．

(2) 曲線 C_2 と線分 OQ，OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(3) $x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_r^q \sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ の値を求めよ．

(4) 円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

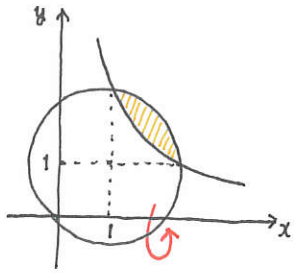
(3) のつづき.

$$(\text{与式}) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos 2\theta \, d\theta$$

$$= \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{2}} \,/\!/$$



(4) $$V = \pi\int_1^{1+\sqrt{2}} y_{C_1}^{\,2} - y_{C_2}^{\,2}\,dx$$

$$= \pi\int_1^{1+\sqrt{2}} 3-(x-1)^2 + 2\sqrt{2-(x-1)^2} - \frac{3+2\sqrt{2}}{x^2}\,dx$$

C_1 : $(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$ より

$(y-1)^2 = 2-(x-1)^2$

$\therefore\ y = 1+\sqrt{2-(x-1)^2}$

$$= \pi\int_1^{1+\sqrt{2}} 3-(x-1)^2-(3+2\sqrt{2})x^{-2}\,dx + 2\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$$

(3)の結果を代入する.

$$= \pi\left[3x - \frac{(x-1)^3}{3} + (3+2\sqrt{2})x^{-1}\right]_1^{1+\sqrt{2}} + 2\pi\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \pi\left(3+3\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{(1+\sqrt{2})^2}{1+\sqrt{2}} - 3 - (3+2\sqrt{2})\right) + \pi^2$$

$$= \underline{\pi\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}-2\right)+\pi^2} \,/\!/$$