

2015年 国際文理 (国際教養) 第3問



3 以下の問に答えなさい。

- (1) 定積分 $\int_0^3 (9-x^2) dx$ の値を求めなさい。
 (2) $k > 0$ とする. 定義域を $-3 \leq x \leq 3$ とする関数

$$f(x) = k(9-x^2)$$

のグラフ $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積が 1 となるような k の値を求めなさい.

- (3) k は (2) で求めた値とし, $-3 \leq t \leq 3$ とする. $x \leq t$ のとき, グラフ $y = f(x)$, x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積 $F(t)$ を t の式で表しなさい.
 (4) (3) で求めた t の関数 $F(t)$ の増減表を作成し, 関数 $y = F(t)$ のグラフの概形を描きなさい.

$$\begin{aligned} (1) \int_0^3 (9-x^2) dx &= \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 \\ &= 27 - 9 \\ &= \underline{18} \end{aligned}$$

$$(2) \text{右図より, } S = \int_{-3}^3 f(x) dx = 2k \int_0^3 (9-x^2) dx = 36k \quad (\because (1) \text{より})$$

$$\therefore 36k = 1 \quad \therefore k = \underline{\frac{1}{36}}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{右図より, } F(t) &= \int_{-3}^t f(x) dx \\ &= \frac{1}{36} \int_{-3}^t (9-x^2) dx \\ &= \frac{1}{36} \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-3}^t \\ &= \frac{1}{36} \left(9t - \frac{1}{3}t^3 + 27 - 9 \right) \\ &= \underline{-\frac{1}{108}t^3 + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$(4) F'(t) = -\frac{1}{36}t^2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{36}(t+3)(t-3), \quad F''(t) = -\frac{1}{18}t$$

t	-3	...	0	...	3
$F'(t)$	0	+	+	+	0
$F''(t)$	+	+	0	-	-
$F(t)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1

\therefore グラフは右のようになる.

