九州大学

2015年 理系 第4問

4 袋の中に最初に赤玉2個と青玉1個が入っている．次の操作を繰り返し行う．

（操作）袋から1個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉1個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉1個を袋に入れる．袋に入っている3個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を1枚もらう．

(1) 2回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ．

(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ．

(3) 8回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ．

(4) 8回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど1枚である確率を求めよ．

(1) 赤 → 赤 と引くので $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\underline{\frac{2}{9}}$ //

(2) 奇数回目の操作後，袋の中の青玉の個数が偶数個であることを数学的帰納法で示す．

2n−1回目（n: 正の整数）の操作後の青玉の個数を a_n とおくと．

(i) $n=1$ のとき．

$a_1=0$ または $a_1=2$ となり，成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると．

$a_{k+1}=a_k+2$ （赤 → 赤 のとき），$a_{k+1}=a_k$ （赤 → 青 または 青 → 赤 のとき）

$a_{k+1}=a_k-2$ （青 → 青 のとき）

a_k：偶数なので，a_{k+1} はいずれの場合も偶数となり，$n=k+1$ のときも成り立つ

(i)，(ii) より，a_n ($n=1,2,\cdots$) は偶数となり，$a_n=3$ になり得ない

∴ 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない ▨

(3) 偶数回目の操作後は（赤，青）=（2，1）または（0，3）

$$\therefore\ \underset{0回目}{(2,1)} \longrightarrow \underset{2回目}{(2,1)} \longrightarrow \underset{4回目}{(2,1)} \longrightarrow \underset{6回目}{(2,1)} \downarrow \underset{8回目}{(0,3)}$$

∴ 右の図より，(1) の余事象より，2回のうち，赤と青が1回ずつの確率は $1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$ なので，$\left(\frac{7}{9}\right)^3\cdot\frac{2}{9}=\underline{\frac{686}{6561}}$ //

(4) (3) と同様に考えて，2回目，4回目，6回目ではじめて，硬貨をもらい，その後もらわない確率と (3) の和を，求めればよいので，

$$\underbrace{\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^2}_{\text{2回目でもらう}}+\underbrace{\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{9}}_{\text{4回目}}+\underbrace{\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}}_{\text{6回目}}+\underbrace{\left(\frac{7}{9}\right)^3\cdot\frac{2}{9}}_{\text{8回目}}=\underline{\frac{2450}{6561}}\ //$$