九州大学

2014年 理系 第5問

数理 石井K

5 2以上の自然数nに対して，関数$f_n(x)$を

$$f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$$

と定義する．$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$に対して，$f_n(x)$が区間$\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$でただ1つの極値をとることを証明せよ．

$f_n(x)$ は x の n 次多項式で微分可能な関数である．

$$f_n\left(\frac{1}{k}\right) = f_n\left(\frac{1}{k+1}\right) = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

であるから，ロルの定理より，各 k について

$$\frac{1}{k+1} < x_k < \frac{1}{k}, \quad f_n'(x_k) = 0$$

となる x_k が存在する．

$$\therefore\ f_n'(x_1) = f_n'(x_2) = \cdots = f_n'(x_{n-1}) = 0, \quad x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$$

となるから，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$ は方程式 $f_n'(x) = 0$ の異なる $n-1$ 個の実数解である．

$f_n'(x)$ は $n-1$ 次式より，$f_n'(x) = 0$ は高々 $n-1$ 個の実数解をもつので

$f_n'(x) = 0$ の実数解は $x = x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$ に限られる．

$\therefore\ f_n'(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$ （a：定数）と表される．

$f_n(x)$ の最高次の項は $n!\,x^n$ であることから，$f_n'(x)$ の最高次の項は $n!\,n\,x^{n-1}$

となる．このことから，$a = n!\cdot n$ $\quad \therefore\ f_n'(x) = n!\cdot n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$

なくても よかった．

$x = x_k$ の前後で $f_n'(x)$ の符号は変化するので，$x = x_k$ で極値をとる．

それ以外の x では，$f_n'(x) \neq 0$ となり，極値をとらない

以上より，$f_n(x)$ は区間 $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ でただ1つの極値をとる ■