# 九州大学

2013年 理系 第5問　　1枚目／2枚

数理 石井K

**5** 実数 $x$, $y$, $t$ に対して，行列

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

を考える．$(AB)^2$ が対角行列，すなわち $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列であるとする．

(1) 命題「$3x-3y-2t \neq 0 \Longrightarrow A=tB$」を証明せよ．

以下 (2)，(3)，(4) では，さらに $A^2 \neq E$ かつ $A^4=E$ であるとする．ただし，$E$ は単位行列を表す．

(2) $3x-3y-2t=0$ を示せ．

(3) $x$ と $y$ をそれぞれ $t$ の式で表せ．

(4) $x$, $y$, $t$ が整数のとき，行列 $A$ を求めよ．

(1) $AB=\begin{pmatrix} 5x-6y & 4x-5y \\ x-5t & x-4t \end{pmatrix}$　$\therefore\ \mathrm{tr}(AB)=5x-6y+x-4t=6x-6y-4t$

$\det(AB)=(5x-6y)(x-4t)-(4x-5y)(x-5t)=x^2-xy-ty$

よって，ケーリー・ハミルトンの定理より．

$(AB)^2-2(3x-3y-2t)AB+(x^2-xy-ty)E=O$

$3x-3y-2t\neq 0$ のとき．$AB=\dfrac{1}{2(3x-3y-2t)}\left\{(AB)^2+(x^2-xy-ty)E\right\}$

いま．$(AB)^2$ が対角行列であることより．右辺の行列の 1,2-成分，2,1-成分はともに 0

よって．$\begin{cases} 4x-5y=0 \\ x-5t=0 \end{cases} \iff x=5t,\ y=4t$

このとき．$A=\begin{pmatrix} 5t & 4t \\ -6t & -5t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}=tB$ ▨

(2) 背理法により示す

$3x-3y-2t\neq 0$ と仮定すると (1) より．$A=tB$

ここで $B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるから．$A^2=t^2B^2=t^2E$ ，$A^4=t^4E$

いま．$A^2\neq E$ かつ $A^4=E$ より．

$t^2\neq 1$ かつ $t^4=1$ $\iff$ $t\neq\pm 1$ かつ $(t+1)(t-1)(t^2+1)=0$

これを同時にみたす実数 $t$ は存在しないので矛盾．

よって．$3x-3y-2t=0$ ▨

数理 石井K

**5** 実数 $x$, $y$, $t$ に対して，行列

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

を考える．$(AB)^2$ が対角行列，すなわち $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列であるとする．

(1) 命題「$3x-3y-2t \neq 0 \Longrightarrow A=tB$」を証明せよ．

以下 (2)，(3)，(4) では，さらに $A^2 \neq E$ かつ $A^4=E$ であるとする．ただし，$E$ は単位行列を表す．

(2) $3x-3y-2t=0$ を示せ．

(3) $x$ と $y$ をそれぞれ $t$ の式で表せ．

(4) $x$, $y$, $t$ が整数のとき，行列 $A$ を求めよ．

(3) ケーリー・ハミルトンの定理より，

$A^2+(-x^2+xy+ty)E=0$ $\quad\therefore\ A^2=(x^2-xy-ty)E \quad \cdots ①$

$A^4=(x^2-xy-ty)^2E \quad \cdots ②$

①，② と $A^2 \neq E$，$A^4=E$ より，$\quad x^2-xy-ty=-1 \quad \cdots ③$

(2) の結果より，$\quad 3x-3y-2t=0 \quad \cdots ④$

③×3 − ④×$(x+t)$ より，$\quad 3x^2-(x+t)(3x-2t)=-3$

$\therefore\ tx=2t^2+3$

ここで ③，④ より，$t=0$ のとき，条件をみたす $x$, $y$ は存在しないから，$t \neq 0$

$\therefore\ \underline{x=2t+\dfrac{3}{t},\ y=\dfrac{4}{3}t+\dfrac{3}{t}}$ //

(4) (3) の結果より，$\dfrac{4t}{3}$ と $\dfrac{3}{t}$ が同時に整数になるのは，$t=3$ または $t=-3$

(i) $t=3$ のとき，

$x=7$，$y=5$ 　よって $A=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$

(ii) $t=-3$ のとき，

$x=-7$，$y=-5$ 　よって，$A=\begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$

(i)，(ii) より，$\underline{A=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -10 & -7 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}}$ //