2015年 工学部 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

4 次の問いに答えよ．

(1) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) とおくと，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束し，その和は $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx$ であることが知られている．これを用いて，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ の和を求めよ．

(2) 等式 $\dfrac{1}{x^2(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a, b, c の値を定めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(n+1)}$ の収束，発散について調べ，収束するときはその和を求めよ．

(1) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\left(-\dfrac{1}{n}\cos nx\right)' dx$

$= \dfrac{1}{\pi}\left[-\dfrac{x}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx$

$= \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{\pi}{n}\cos n\pi - \dfrac{\pi}{n}\cos(-n\pi)\right) + \dfrac{1}{n\pi}\left[\dfrac{1}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}$

$= -\dfrac{2}{n}\cos n\pi$

$= \dfrac{2}{n}\cdot(-1)^{n-1}$

$\therefore\ a_n^2 = \dfrac{4}{n^2}$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2} = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx$

$= \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi}$

$= \dfrac{2}{3}\pi^2$

$\therefore$ 両辺を4で割って，$\underline{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}}$ //

(2) (右辺) $= \dfrac{ax(x+1)+b(x+1)+cx^2}{x^2(x+1)}$

$= \dfrac{(a+c)x^2+(a+b)x+b}{x^2(x+1)}$

両辺の係数を比べて，

$b=1,\ a=-1,\ c=1$

$\therefore\ \underline{(a,b,c)=(-1,1,1)}$ //

信州大学

2015 年 工学部 第 4 問

２枚目／２枚

数理 石井K

4 次の問いに答えよ．

(1) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束し，その和は $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx$ であることが知られている．これを用いて，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の和を求めよ．

(2) 等式 $\dfrac{1}{x^2(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$ の収束，発散について調べ，収束するときはその和を求めよ．

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
$$= -1 + \frac{\pi^2}{6}$$
$$= \underline{\frac{\pi^2}{6} - 1}\ //$$