

2014年 医学部 第4問



4 2つの曲線 $y = 6\sin x$ と $y = 4 - 2\cos 2x$ は $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ で共通点を持つ。また、この2つの曲線で囲まれた部分の面積は $5\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$ である。ただし、 $0 \leq x \leq \pi$ とする。

$6\sin x - 4 + 2\cos 2x = 0$ を解くと。

$$-2(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2}, 1$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ より, } x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$$

右のグラフのようにどちらのグラフも

$x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称なので求める面積を S とおくと。

$$S = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (6\sin x - 4 + 2\cos 2x) dx$$

$$= 2 \left[-6\cos x - 4x + \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 \left(-2\pi + 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 5\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$$

