名城大学

2015年 薬学部 第2問

$\boxed{2}$ 空間内の4点O(0, 0, 0), A(2, 1, 1), B(1, 2, −1), C(−2, 4, 3)を頂点とする四面体OABCについて，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角 θ を求めよ．

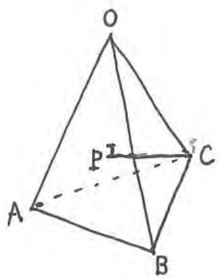
(2) 点Cから三角形OABに垂線を下ろす．この垂線と三角形OABとの交点をPとするとき，$\overrightarrow{CP}$ を求めよ．

(3) 点Qを辺OC上にとる．四面体OABQの体積が $\dfrac{9}{4}$ となるとき，$\overrightarrow{OQ}$ を求めよ．

(1) $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$

$= \dfrac{2+2-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}$

$= \dfrac{1}{2}$



$0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より．$\underline{\theta = 60^\circ}$ //

(2) 点Pは平面OAB上にあるので $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ (s, t：実数)と表せる

$\therefore\ \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{CP} \perp$ 平面OAB $\iff$ $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$ かつ $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$

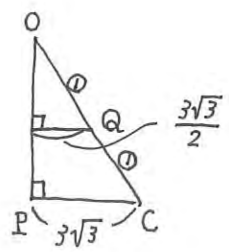
ここで，$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{6}$，$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{29}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 3$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 3$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = 3$ より，

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OA} = s|\overrightarrow{OA}|^2 + t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = 6s + 3t - 3$

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OB} = s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + t|\overrightarrow{OB}|^2 - \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 3t + 6t - 3$

$\therefore\ 2s + t = 1 \cdots$①，$t + 2t = 1 \cdots$②　①，②より $s = t = \dfrac{1}{3}$

よって，$\overrightarrow{CP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \underline{(3, -3, -3)}$ //



(3) $\triangle$OABの面積は．$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\sin 60^\circ = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 四面体OABCの体積は．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \times |\overrightarrow{CP}| \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \times 3\sqrt{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{9}{2}$

右図より

$\therefore$ $OQ = \dfrac{1}{2}OC$ であるから．$\overrightarrow{OQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \underline{\left(-1, 2, \dfrac{3}{2}\right)}$ //