秋田大学

2013年 第2問

数理 石井K

2 $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ はすべて正の実数である．次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つことを証明せよ．

(2) (1)において等号が成り立つのはどのようなときかを示せ．

(3) $a^2+b^2+c^2=25,\ x^2+y^2+z^2=36,\ ax+by+cz=30$ のとき，$\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$ の値を求めよ．

(1) (左辺) − (右辺) $= a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2$

$-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz)$

$=(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2$

$\geqq 0$ ■

(2) 等号成立は、$ay=bx$ かつ $az=cx$ かつ $bz=cy$

$\Leftrightarrow$ $a:b=x:y$ かつ $a:c=x:z$ かつ $b:c=y:z$

$\Leftrightarrow$ $\underline{a:b:c=x:y:z}$ //

(3) $a^2+b^2+c^2=25,\ x^2+y^2+z^2=36,\ ax+by+cz=30$ のとき．

$25\times 36=30^2$ なので (1)の式の等号が成り立つ

∴ (2)より．$a=kx,\ b=ky,\ c=kz$ とおける．

$\therefore\ ax+by+cz=k(x^2+y^2+z^2)$

$=36k$

$\therefore\ 36k=30 \quad \therefore\ k=\dfrac{30}{36}=\dfrac{5}{6}$

$\dfrac{a+b+c}{x+y+z}=\dfrac{k(x+y+z)}{x+y+z}=k=\underline{\dfrac{5}{6}}$ //