0001731908628999

青山学院大学

2012年 理工A方式 第5問

数理 石井K

5 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n}{3a_n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

今回は帰納法で出したが，両辺逆数をとった方が速い！

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n+1}{4a_n} \quad \therefore \underbrace{\frac{1}{a_{n+1}}}_{b_{n+1}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\frac{1}{a_n}}_{b_n}$$

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $a_n - 1 < 10^{-5}$ となる最小の自然数 n を求めよ．ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(1) $\underline{a_2 = \frac{4a_1}{3a_1+1} = \frac{8}{7}}$ // $\quad \underline{a_3 = \frac{4\cdot\frac{8}{7}}{3\cdot\frac{8}{7}+1} = \frac{32}{31}}$ // $\quad \underline{a_4 = \frac{4\cdot\frac{32}{31}}{3\cdot\frac{32}{31}+1} = \frac{128}{127}}$ //

(2) (1) より，$\boxed{a_n = \frac{2^{2n-1}}{2^{2n-1}-1}}$ と類推する．これを数学的帰納法で示す …(*)

(i) $n=1$ のとき

$a_1 = \frac{2}{2-1} = 2$ となり成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると．$a_k = \frac{2^{2k-1}}{2^{2k-1}-1}$

$$\therefore a_{k+1} = \frac{4\cdot\frac{2^{2k-1}}{2^{2k-1}-1}}{3\cdot\frac{2^{2k-1}}{2^{2k-1}-1}+1} = \frac{4\cdot 2^{2k-1}}{3\cdot 2^{2k-1}+2^{2k-1}-1} = \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+1}-1} = \frac{2^{2(k+1)-1}}{2^{2(k+1)-1}-1}$$

$\therefore n=k+1$ のときも成り立つ

(i), (ii) より．すべての自然数 n で (*) が成り立つ

(3) $a_n - 1 = \frac{1}{2^{2n-1}-1}$

$\therefore \frac{1}{2^{2n-1}-1} < 10^{-5}$

$\therefore 2^{2n-1} - 1 > 10^5$

これをみたす n は

$\underbrace{2^{2n-1} > 10^5}$ をみたすので

下式の等号が成り立つことはないので，このように変形できる．

$2^{2n-1} = 10^5$

両辺．底10の対数をとると．

$(2n-1)\log_{10} 2 > 5$

$\therefore 2n-1 > \frac{5}{0.3010}$

$\therefore n > \frac{5.3010}{0.6020} \fallingdotseq 8.8$

$\therefore \underline{n = 9}$ //