鳥取大学

2015年工・農・医（生命科学）第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，2曲線 $y=\cos x$，$y=\sin 2x$ で囲まれた図形を x 軸の周りに1回転してできる立体の体積 V を求めたい．次の問いに答えよ．

(1) 2曲線 $y=\cos x$，$y=\sin 2x$ の交点の x 座標をすべて求めよ．ただし，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．

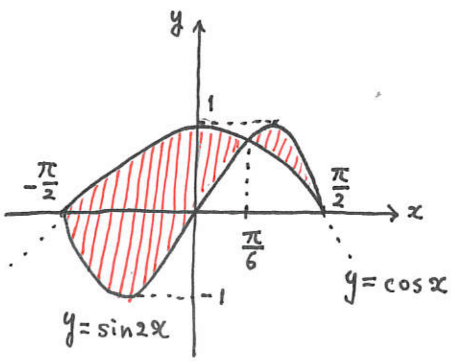
(2) 体積 V を求めよ．

(1) $\sin 2x - \cos x = 0$ を解くと．

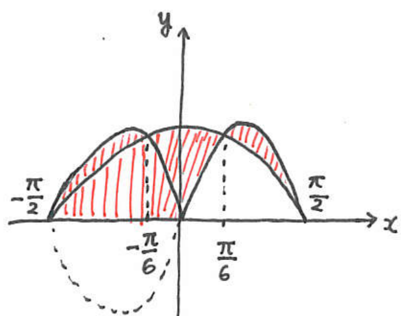
$\cos x(2\sin x - 1) = 0 \quad \therefore \cos x = 0$ または $\sin x = \dfrac{1}{2}$

$\therefore x = \pm\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{6}$ //

(2) 右のグラフより．図形の対称性も考えて．



↓ x軸で折り返した



$$V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x\,dx + 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,dx$$

$$-\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2x\,dx - \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx + 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx$$

$$-\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx - \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} + \cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\,dx$$

$$+ \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} - \cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{16}\right)\pi + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\pi$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{16}\pi$$ //