0002103726987999

山形大学

2015年 医学部 第4問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{4}$ 曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ e^a)$ における接線 ℓ と x 軸との交点を $\mathrm{B}(b,\ 0)$ とする．ただし，$a>1$ とする．この曲線と直線 ℓ および直線 $x=b$ で囲まれた図形を D とする．このとき，次の問に答えよ．

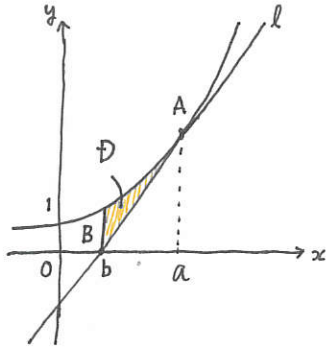
(1) b を a を用いて表せ．

(2) 図形 D の面積 S を a を用いて表せ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{e^b}^{e^a}(\log y)^2\,dy$ を a を用いて表せ．

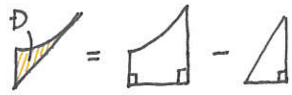
(4) 図形 D を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(5) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V}{ae^a}$ と $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V}{aS}$ を求めよ．



(1) $y'=e^x$ より．$\ell : y=e^a(x-a)+e^a$

$\therefore\ 0=e^a(x-a+1)\quad \therefore\ x=a-1\quad \therefore\ \underline{b=a-1}$ //



(2) $S=\displaystyle\int_b^a e^x\,dx-\frac{1}{2}(a-b)e^a$

$=\left[e^x\right]_b^a-\dfrac{1}{2}(a-b)e^a$

$=\underline{\dfrac{1}{2}e^a-e^{a-1}}$ //　（$b=a-1$ を代入した）

(3) $x=\log y$ とおいて置換積分 $\begin{array}{c|c} y & e^b\to e^a \\ x & b\to a\end{array}$，$dx=\dfrac{1}{y}dy \iff dy=e^x dx$

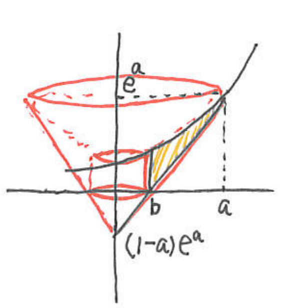
$\therefore\displaystyle\int_{e^b}^{e^a}(\log y)^2\,dy=\int_b^a x^2e^x\,dx$

$=\left[x^2e^x\right]_b^a-2\displaystyle\int_b^a xe^x\,dx$

$=a^2e^a-b^2e^b-2\left[xe^x\right]_b^a+2\displaystyle\int_b^a e^x\,dx$

$=a^2e^a-b^2e^b-2ae^a+2be^b+2e^a-2e^b$

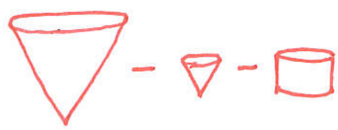
$=\underline{(a^2-2a+2)e^a-(a^2-4a+5)e^{a-1}}$ //



(4) $V=\pi\cdot a^2\cdot ae^a\cdot\dfrac{1}{3}-\pi b^2\cdot(a-1)e^a\cdot\dfrac{1}{3}-\pi b^2\cdot$

$-\pi\displaystyle\int_{e^b}^{e^a}(\log y)^2\,dy$

$=\underline{\pi e^{a-1}\left\{e\left(a-\frac{5}{3}\right)-2a+4\right\}}$ //



2枚目へつづく

0002103726987999

山形大学

2015年 医学部 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

4 曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ e^a)$ における接線 ℓ と x 軸との交点を $\mathrm{B}(b,\ 0)$ とする．ただし，$a>1$ とする．この曲線と直線 ℓ および直線 $x=b$ で囲まれた図形を D とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) b を a を用いて表せ．

(2) 図形 D の面積 S を a を用いて表せ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{e^b}^{e^a}(\log y)^2\,dy$ を a を用いて表せ．

(4) 図形 D を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(5) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V}{ae^a}$ と $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V}{aS}$ を求めよ．

(5) $$\lim_{a\to\infty}\frac{V}{ae^a}=\lim_{a\to\infty}\pi\left\{\left(1-\underbrace{\frac{5}{3a}}_{\to 0}\right)-\frac{2}{e}+\underbrace{\frac{4}{ea}}_{\to 0}\right\}=\underline{\pi\left(1-\frac{2}{e}\right)}_{\,//}$$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{V}{aS}=\lim_{a\to\infty}\frac{\pi e^{a-1}\left\{e\left(a-\frac{5}{3}\right)-2a+4\right\}}{\frac{1}{2}ae^{a-1}(e-2)}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{2\pi\left\{e\left(1-\frac{5}{3a}\right)-2+\frac{4}{a}\right\}}{e-2}$$

$$=\frac{2\pi(e-2)}{e-2}$$

$$=\underline{2\pi}_{\,//}$$