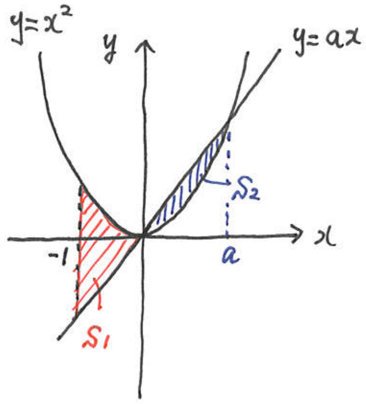
0001879540218999

日本女子大学

2014 年 人間社会学部 第 2 問



$\boxed{2}$ aを正の実数とする．座標平面上で連立不等式

$$y \leqq x^2, \quad y \geqq ax, \quad -1 \leqq x \leqq 0$$

の表す領域の面積を S_1 とし，連立不等式

$$y \geqq x^2, \quad y \leqq ax$$

の表す領域の面積を S_2 とする．このとき，面積の差 $S_1 - S_2$ の最大値と，そのときの a の値を求めよ．

$$S_1 = \int_{-1}^{0} x^2 - ax \, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2 \right]_{-1}^{0}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_{0}^{a} ax - x^2 \, dx$$

$$= -\int_{0}^{a} x(x-a) \, dx$$

$$= \frac{1}{6}a^3$$

$\therefore$ $S_1 - S_2$ を $f(a)$ とおくと

$$f(a) = -\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}$$

$$\therefore f'(a) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(a-1)(a+1)$$

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(a)$	$\left(\frac{1}{3}\right)$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$

$\therefore$ 増減表より

$S_1 - S_2$ の最大値は $\frac{2}{3}$ ($a=1$ のとき)