



2016年 医学部 第2問

2 1辺の長さが2の立方体 ABCD-EFGH がある。下の図1のように、2辺 BC, CD 上に、 $BS = CT = x$ ($0 \leq x \leq 2$) を満たす点 S, T をとる。このとき、三角形 EST の面積の最大値と最小値を求めたい。以下の問いに答えよ。

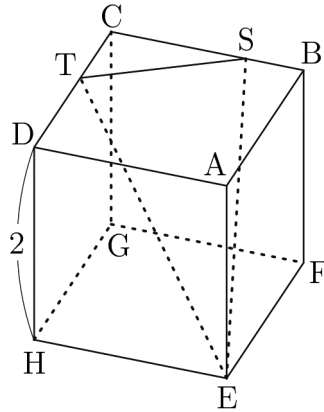


図1

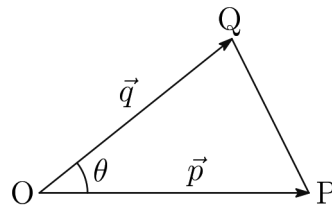


図2

(1) 上の図2を参考にして、三角形 OPQ において $\vec{OP} = \vec{p}$, $\vec{OQ} = \vec{q}$ とおくと、三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2 - (\vec{p} \cdot \vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ。

(2) $\vec{EF} = \vec{a}$, $\vec{EH} = \vec{b}$, $\vec{EA} = \vec{c}$ とおく。立方体の1辺の長さが2であることに注意して、 \vec{ES} , \vec{ET} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} および x を用いて表せ。また、 $|\vec{ES}|^2$, $|\vec{ET}|^2$ を、それぞれ x の式として表せ。さらに、 \vec{ES} と \vec{ET} の内積 $\vec{ES} \cdot \vec{ET}$ は、 x によらない一定の値になることを示せ。

(3) 上の(1)を利用して三角形 EST の面積 $f(x)$ を求めよ。

(4) $0 \leq x \leq 2$ の範囲で、 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x の値も答えよ。