0001633636638999

京都大学

2014年 文系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ tを実数とする．$y = x^3 - x$のグラフCへ点P(1, t)から接線を引く．

(1) 接線がちょうど1本だけ引けるようなtの範囲を求めよ．

(2) tが(1)で求めた範囲を動くとき，P(1, t)からCへ引いた接線とCで囲まれた部分の面積を$S(t)$とする．$S(t)$の取りうる値の範囲を求めよ．

(1) 接点を(s, s^3-s)とおくと，$y' = 3x^2-1$より 接線は

$y = (3s^2-1)(x-s)+s^3-s \quad \therefore\ y = (3s^2-1)x - 2s^3$

これが P$(1, t)$を通るので，$t = 3s^2 - 1 - 2s^3$

$f(s) = 2s^3 - 3s^2 + t + 1$ とおくと，接線がちょうど1本 $\Leftrightarrow$ $f(s) = 0$の実数解がちょうど1個．

$f'(s) = 6s^2 - 6s = 6s(s-1)$

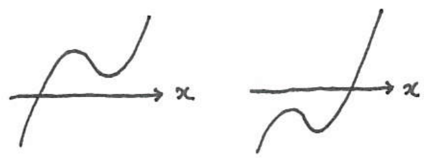
s	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(s)$	+	0	−	0	+
$f(s)$	↗	$t+1$	↘	t	↗

∴ 右の増減表とグラフより．

$f(0)$と$f(1)$が同符号となる．

$\therefore\ f(0)\cdot f(1) = t(t+1) > 0$

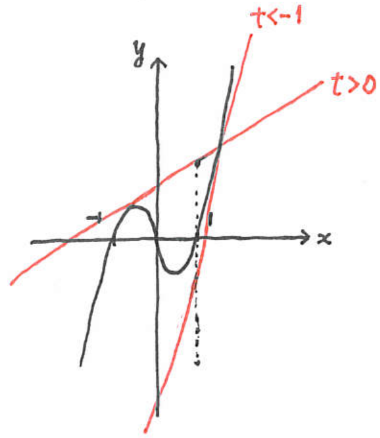
$\therefore\ \underline{t < -1,\ t > 0}$ //



(2) 接点以外の交点のx座標を求める

$x^3 - x - (3s^2-1)x + 2s^3 = 0$

$\therefore\ (x-s)^2(x+2s) = 0 \quad \therefore\ x = s, -2s$



右のグラフより．$t<-1$のとき $s<0$，$t>0$のとき $s>0$であるから

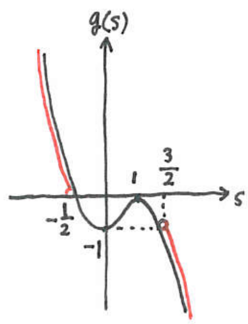
$$S(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-2s}^{s} x^3 - x - (3s^2-1)x + 2s^3\,dx & (t<-1 \text{のとき}) \\ \displaystyle\int_{s}^{-2s} (3s^2-1)x - 2s^3 - x^3 + x\,dx & (t>0 \text{のとき}) \end{cases}$$

∴ どちらの場合も $S(t) = \displaystyle\int_{-2s}^{s} (x-s)^2(x+2s)\,dx = \frac{1}{12}\{s-(-2s)\}^4 = \frac{27}{4}s^4$

また，$g(s) = -2s^3 + 3s^2 - 1$ とおくとき．$y = g(s)$のグラフは．

$g'(s) = -6(s-1)s$

s	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(s)$	−	0	+	0	−
$g(s)$	↘	−1	↗	0	↘



∴ 右のグラフから $t<-1,\ t>0$ のとき，

$s < -\frac{1}{2},\ s > \frac{3}{2}$

$\therefore\ S(t) = \frac{27}{4}s^4$ より．$\underline{S(t) > \frac{27}{64}}$ //