2014 年 第 4 問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ a を $a>2$ である実数とする．xy 平面上の曲線 $C: y=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y=a$ の交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\tan\alpha$ および $\tan\beta$ を a を用いて表せ．

(2) C と x 軸，および 2 直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた領域を S とする．S の面積を a を用いて表せ．

(3) S を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(1) $a=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$ を解く．$\dfrac{1}{2}\sin 2x=\dfrac{1}{a}$ $\therefore \sin 2x=\dfrac{2}{a}$

$\therefore \cos 2x=\pm\sqrt{1-\dfrac{4}{a^2}}$ $a>2$ より $\cos 2x=\pm\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}$

$\alpha<\beta$ より．$\cos 2\alpha=\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}$，$\cos 2\beta=-\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}$

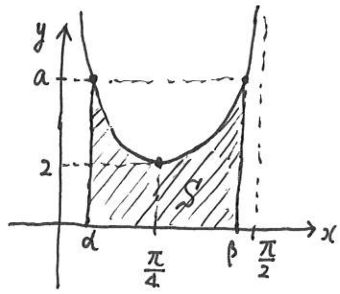
$$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}}{1+\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}}}=\sqrt{\frac{(a-\sqrt{a^2-4})^2}{4}}$$

$\therefore \underline{\tan\alpha=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}$ //　同様にして，$\underline{\tan\beta=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}$ //

(2) $y'=\dfrac{-\cos^2 x+\sin^2 x}{(\sin x\cos x)^2}=\dfrac{-\cos 2x}{(\sin x\cos x)^2}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	2	$\nearrow$	

$\displaystyle\lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} y=+\infty$ より グラフは右になる



$$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sin x\cos x}\,dx$$

$\tan x=t$ とおくと

$$S=\int_{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}^{\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}} \frac{t(t^2+1)}{t^2}\cdot\frac{dt}{t^2+1}$$

$$=\int_{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}^{\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}} \frac{dt}{t}$$

ここでとめてもよい．

$$=\log\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2+4}}$$

$$=\underline{2\log\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}\ //$$

2014年 第4問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ a を $a>2$ である実数とする．xy 平面上の曲線 $C: y=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y=a$ の交点の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\tan\alpha$ および $\tan\beta$ を a を用いて表せ．

(2) C と x 軸，および2直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた領域を S とする．S の面積を a を用いて表せ．

(3) S を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(3) $$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{1}{\sin x\cos x}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_{\tan\alpha}^{\tan\beta}\frac{1+t^2}{t^2}\cdot(t^2+1)\cdot\frac{dt}{t^2+1}$$

$$=\pi\int_{\tan\alpha}^{\tan\beta}1+t^{-2}\,dt$$

$$=\pi\left[t-t^{-1}\right]_{\tan\alpha}^{\tan\beta}$$

$$=\pi\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}-\frac{2}{a+\sqrt{a^2-4}}-\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}+\frac{2}{a-\sqrt{a^2-4}}\right)$$

$$=\pi\left(\sqrt{a^2-4}+\frac{2(a+\sqrt{a^2-4}-a+\sqrt{a^2-4})}{4}\right)$$

$$=\underline{2\pi\sqrt{a^2-4}}_{\,/\!/}$$