0001730099628999

東北薬科大学

2012年 薬学部 第1問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{1}$ 関数 $y=1-x^2$, $y=4+3x-x^2$ を考える．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 不等式 $0 \leqq y \leqq 1-x^2$ で表される領域の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}\ 4}{\boxed{\text{イ}}\ 3}$ である．また，不等式

$$y \geqq 1-x^2, \quad y \leqq 4+3x-x^2, \quad y \geqq 0$$

で表される領域の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}\ 39}{\boxed{\text{オ}}\ 2}$ である．

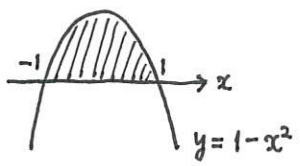
(2) 曲線 $y=1-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(k,\ 1-k^2)$ における接線を ℓ とおく．このとき接線 ℓ が曲線 $y=4+3x-x^2$ と異なる 2 点で交わるような k の値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}\ -7}{\boxed{\text{ク}}\ 4} < k$ である．また，このとき交点の x 座標の値を α, β とおくと

$$\alpha+\beta = \underset{3}{\boxed{\text{ケ}}} + \underset{2}{\boxed{\text{コ}}}\,k, \quad \alpha\beta = \underset{-3}{\boxed{\text{サシ}}} + k^{\boxed{\text{ス}}\ 2}$$

である．

(3) 接線 ℓ と曲線 $y=4+3x-x^2$ で囲まれる領域の面積が $\dfrac{125}{6}$ となる k の値は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}\ 1}{\boxed{\text{ソ}}\ 3}$ である．

(1)



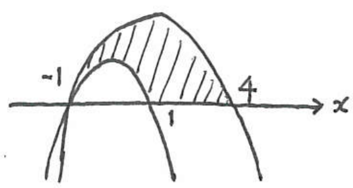
$$S_1 = \int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \underline{\frac{4}{3}}\ //$$

$y=-x^2+3x+4$
$\quad = -(x-4)(x+1)$

また，2曲線の交点のx座標は，

$1-x^2-(-x^2+3x+4)=0$

$\therefore x=-1$



$$\therefore S_2 = \int_{-1}^{4} -x^2+3x+4\,dx - S_1 = \frac{1}{6}\cdot 5^3 - \frac{4}{3} = \underline{\frac{39}{2}}\ //$$

(2) $y'=-2x$ より．$\ell: y=-2k(x-k)+1-k^2$

$\therefore \ell: y=-2kx+1+k^2$

$-x^2+3x+4-(-2kx+1+k^2)=0$ が異なる2つの実数解をもつ．

$x^2-(3+2k)x-3+k^2=0$ の判別式をDとおくと．$D=(3+2k)^2-4(k^2-3)$
$\qquad = 12k+21$

2枚目につづく

0001730099628999

東北薬科大学

2012 年 薬学部 第 1 問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 関数 $y=1-x^2$, $y=4+3x-x^2$ を考える．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 不等式 $0 \leqq y \leqq 1-x^2$ で表される領域の面積は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．また，不等式

$$y \geqq 1-x^2,\quad y \leqq 4+3x-x^2,\quad y \geqq 0$$

で表される領域の面積は $\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ である．

(2) 曲線 $y=1-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(k,\ 1-k^2)$ における接線を ℓ とおく．このとき接線 ℓ が曲線 $y=4+3x-x^2$ と異なる 2 点で交わるような k の値の範囲は $\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}} < k$ である．また，このとき交点の x 座標の値を α, β とおくと

$$\alpha+\beta = \boxed{ケ} + \boxed{コ}k,\quad \alpha\beta = \boxed{サシ} + k^{\boxed{ス}}$$

である．

(3) 接線 ℓ と曲線 $y=4+3x-x^2$ で囲まれる領域の面積が $\dfrac{125}{6}$ となる k の値は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ である．

(2) のつづき．

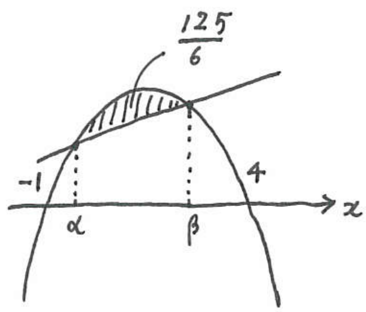
$\therefore$ $D>0$ より．$\underline{k > -\dfrac{7}{4}}$ //　　また，解と係数の関係より．$\begin{cases} \alpha+\beta = \underline{3+2k} \text{ //} \\ \alpha\beta = \underline{-3+k^2} \text{ //} \end{cases}$

(3) ℓ と $y=4+3x-x^2$ で囲まれる領域の面積を S_3 とおくと．

$$S_3 = \int_\alpha^\beta 4+3x-x^2-(-2kx+1+k^2)\,dx$$

$$= \int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots ①$$



ここで，$(\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= (3+2k)^2 - 4(k^2-3)$　　($\because$ (2) より)

$= 12k+21$

$\therefore$ $\beta > \alpha$ より．$\beta-\alpha = \sqrt{12k+21}$

$\therefore$ ① と $S_3 = \dfrac{125}{6}$ より．$\dfrac{1}{6}(12k+21)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{5^3}{6}$　$\therefore$ $\sqrt{12k+21} = 5$　　$\therefore$ $\underline{k = \dfrac{1}{3}}$ //