



2013年医学部第4問

- 4 オ, タ, チ, ト, ナ の解答は対応する解答群の中から最も適当なものを1つ選べ。

条件 $a_1 = 0, a_2 = 0$ と漸化式

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2^n \log_2 \frac{(n+1)^2}{n} \quad \dots\dots(*)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる数列の一般項を、以下の要領で求めてみよう。

(1) 漸化式 (*) より、ベクトル $\vec{b}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\vec{b}_{n+1} = A\vec{b}_n + \begin{pmatrix} 2^n \log_2 \frac{(n+1)^2}{n} \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成立する。ただし、行列 A は $A = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イウ}} \\ \boxed{\text{エ}} & 0 \end{pmatrix}$ である。

この式の両辺に、 A の逆行列 A^{-1} を左から n 回かけると

$$(A^{-1})^n \vec{b}_{n+1} = (A^{-1})^{n-1} \vec{b}_n + (A^{-1})^n \begin{pmatrix} 2^n \log_2 \frac{(n+1)^2}{n} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、 $(A^{-1})^{n-1} \vec{b}_n$ の階差数列がわかる。これより、2以上の整数 n に対し、

$$(A^{-1})^{n-1} \vec{b}_n = \vec{b}_1 + \sum_{k=1}^{\boxed{\text{オ}}} (A^{-1})^k \begin{pmatrix} 2^k \log_2 \frac{(k+1)^2}{k} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(**)$$

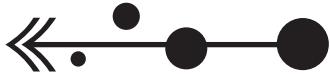
を得る。

(2) (**) 式の右辺第一項は $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\text{カ}} \\ \boxed{\text{キ}} \end{pmatrix}$ であり、 $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boxed{\text{ク}} & \boxed{\text{ケ}} \\ \boxed{\text{コサ}} & \boxed{\text{シ}} \end{pmatrix}$ は行列 $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて

$$A^{-1} = P \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} \boxed{\text{ス}} & \\ \hline \boxed{\text{セ}} & 0 \\ \hline 0 & \boxed{\text{ソ}} \end{array} \end{pmatrix} P^{-1}$$

と表されるので、(**) 式右辺の和の項について、次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{\boxed{\text{オ}}} (A^{-1})^k \begin{pmatrix} 2^k \log_2 \frac{(k+1)^2}{k} \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \log_2 \boxed{\text{タ}} \\ -2^n \log_2 \boxed{\text{チ}} \end{pmatrix}$$



(3) (2) の結果と、行列 A が同じ P を用いて

$$A = P \begin{pmatrix} \boxed{\text{ツ}} & 0 \\ 0 & \boxed{\text{テ}} \end{pmatrix} P^{-1}$$

と表わされることに注意すると、(**) 式の両辺に行列 A を左から $(n-1)$ 回かけて得られる \vec{b}_n から、一般項 a_n は

$$a_n = 2 \boxed{\text{ト}} \log_2 \boxed{\text{ナ}}$$

$(n = 2, 3, 4, \dots)$ となる。

オ , ト の解答群

- | | | | |
|-----------------------------|----------|----------------------|-----------|
| ① $n-1$ | ② n | ③ $n+1$ | ④ $1-n$ |
| ⑤ $-n$ | ⑥ $-n-1$ | ⑦ $\frac{n(n+1)}{2}$ | ⑧ n^2-1 |
| ⑨ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ | | | |

タ , チ , ナ の解答群

- | | | | |
|---------------------|-----------------|-------------------|--------------------|
| ① $n-1$ | ② n | ③ $\frac{n+1}{n}$ | ④ $\frac{4n-6}{n}$ |
| ⑤ n^2-4n+5 | ⑥ $(n-1)!$ | ⑦ $n!^n$ | ⑧ $n!-1$ |
| ⑨ $(n-1) \times n!$ | ⑩ $n \times n!$ | | |