# 群馬大学

2014年 教育学部（数学・技術・理科）第1問



$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 3次方程式 $x^3-3x+1=0$ は相異なる3つの実数解をもつことを示せ．

(2) $x^3-3x+1=0$ の解で最小のものを $\alpha$，最大のものを $\beta$ とする．このとき，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_\alpha^\beta |x^2-1|\,dx$$

(1) $f(x)=x^3-3x+1$ とおくと

$f(-2)=-8+6+1=-1<0$

$f(-1)=-1+3+1=3>0$

$f(0)=1>0$

$f(1)=1-3+1=-1<0$

$f(2)=8-6+1=3>0$

$\therefore$ $x^3-3x+1=0$ は区間 $(-2,-1)$，$(0,1)$，$(1,2)$ にそれぞれ実数解をもつ

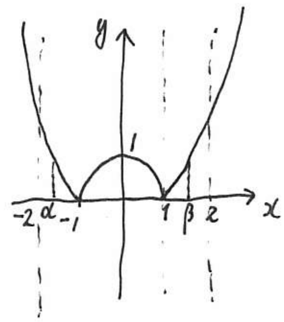
$f(x)=0$ は3次方程式より，相異なる3つの実数解をもつ ▨

(2) (1)より，$-2<\alpha<-1$，$1<\beta<2$ より

$$\int_\alpha^\beta |x^2-1|\,dx=\int_\alpha^{-1} x^2-1\,dx+\int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx+\int_1^\beta x^2-1\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_\alpha^{-1}+\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^\beta$$

$$=-\frac{1}{3}+1-\frac{\alpha^3}{3}+\alpha+1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)+\frac{\beta^3}{3}-\beta-\frac{1}{3}+1$$




$$=\frac{8}{3}-\frac{\alpha^3-3\alpha+1}{3}+\frac{\beta^3-3\beta+1}{3}$$

$\alpha$，$\beta$ が $x^3-3x+1=0$ の解であることから

$\alpha^3-3\alpha+1=0$

$\beta^3-3\beta+1=0$ を使う．

$$=\frac{8}{3}$$