# 香川大学

2016 年 工学部 第 4 問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 座標平面上の曲線 $C : y = e^x$ に対し，次の問に答えよ．

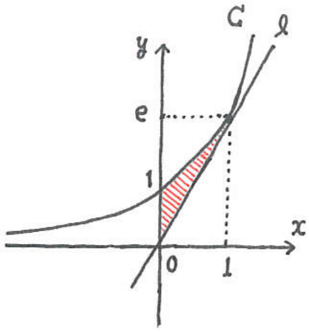
(1) 原点から曲線 $C$ に引いた接線 $\ell$ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 $C$ と接線 $\ell$，および $y$ 軸で囲まれた図形 $D$ を図示せよ．

(3) $D$ を $x$ 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(4) 部分積分法を用いて，不定積分 $I = \int \log y\, dy$，$J = \int (\log y)^2\, dy$ を求めよ．

(5) $D$ を $y$ 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．




(1) $y' = e^x$ より，接点を $(t, e^t)$ とおくと，

$\ell : y = e^t(x - t) + e^t$ …①

これが原点を通るので，$0 = e^t(1 - t)$ ∴ $t = 1$

①に代入して，$\underline{\ell : y = ex}$ //

(2) 図形Dは右図の斜線部分

(3) $V_x = \pi \int_0^1 (e^x)^2\, dx - \underbrace{\frac{1}{3}\pi \cdot e^2 \cdot 1}_{\text{円すいの体積}}$

$= \pi \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \frac{1}{3}\pi e^2$

$= \frac{1}{2}\pi e^2 - \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi e^2$

$= \underline{\frac{\pi}{6} \cdot (e^2 - 3)}$ //

(4) $I = \int (y)' \log y\, dy = y \log y - \int dy$ ∴ $\underline{I = y(\log y - 1) + C_1 \quad (C_1 \text{は積分定数})}$ //

$J = \int (y)'(\log y)^2\, dy = y(\log y)^2 - \int 2 \log y\, dy$

∴ $J = y(\log y)^2 - 2I$ ∴ $\underline{J = y(\log y)^2 - 2y\log y + 2y + C_2 \quad (C_2 \text{は積分定数})}$ //

(5) $V_y = \underbrace{\frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot e}_{\text{円すい}} - \pi \int_1^e x^2\, dy$

$= \frac{1}{3}\pi e - \pi \int_1^e (\log y)^2\, dy$

$= \frac{1}{3}\pi e - \pi \left[ y(\log y)^2 - 2y\log y + 2y \right]_1^e$

$= \frac{1}{3}\pi e - \pi (e - 2e + 2e - 2)$

$= \underline{\frac{2\pi}{3} \cdot (3 - e)}$ //