



2016年 理工学部 第1問

1 次の問いに答えよ。

- (1) 2つのベクトル  $\vec{a} = (1, -1, -1)$ ,  $\vec{b} = (2, 1, -2)$  の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。  
 (2)  $1 \leq x \leq 27$  のとき、関数  $y = (\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 3$  の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの  $x$  の値を求めよ。  
 (3) 複素数平面上で、点  $P(1 - \sqrt{3}i)$  を中心とする円に内接する正三角形がある。この正三角形の頂点の1つが点  $A(2)$  であるとき、残りの2つの頂点を表す複素数を求めよ。ただし、 $i$  は虚数単位とする。

(1)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の両方に垂直なベクトルを  $\vec{c} = (x, y, z)$  とおくと、

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = x - y - z = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 2x + y - 2z = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \cdot \textcircled{2}$  より、 $z = x, y = 0 \quad \therefore \vec{a}$  と  $\vec{b}$  の両方に垂直なベクトルの1つは、 $\vec{c} = (1, 0, 1)$

よって求めるベクトルは、 $\pm \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$  //

(2)  $t = \log_3 x$  とおくと、 $1 \leq x \leq 27$  より、 $0 \leq t \leq 3$ 

$$y = t^2 - 2t - 3$$

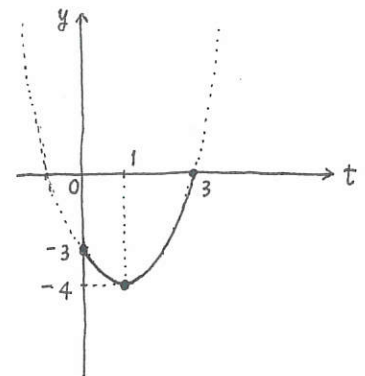
$$= (t-1)^2 - 4$$

$\therefore$  右の図より

$$t=3 \Leftrightarrow x=27$$

$$t=1 \Leftrightarrow x=3$$

最大値  $0$  ( $x=27$  のとき)、最小値  $-4$  ( $x=3$  のとき) //

(3) 点  $P$  を中心に点  $A$  を  $120^\circ, 240^\circ$  回転させればよいので

$$\{2 - (1 - \sqrt{3}i)\} \cdot (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) + (1 - \sqrt{3}i)$$

$$= (1 + \sqrt{3}i) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 - \sqrt{3}i$$

$$= -2 + 1 - \sqrt{3}i$$

$$= -1 - \sqrt{3}i$$

$$\{2 - (1 - \sqrt{3}i)\} \cdot (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) + (1 - \sqrt{3}i)$$

$$= (1 + \sqrt{3}i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 - \sqrt{3}i$$

$$= 2 - 2\sqrt{3}i$$

$\therefore -1 - \sqrt{3}i, 2 - 2\sqrt{3}i$  //

