

## 岐阜大学

2016年 第4問

4  $n$  を正の整数とする.  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k}$  とおく. 以下の問に答えよ. ただし,  $\log$  は自然対数を表す.

(1)  $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$  を数学的帰納法を用いて証明せよ. ただし,  $x \neq 1$  とする.

(2)  $\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) dx = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$  を示せ.

(3)  $S_n = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$  を示せ.

(4)  $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \frac{1}{2^n} \log 2$  を示せ.

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots$  の値を求めよ.