

2013年医学部第2問

2 自然数 m, n は, $2 \leq m < n$ を満たすとする.

(1) 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{n+1-m}{m(n+1)} < \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} < \frac{n+1-m}{n(m-1)}$$

(2) 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{3}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) \leq 2$$

(3) (2) の不等式をより精密にした, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{29}{18} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) \leq \frac{61}{36}$$