愛知教育大学

2013年 第8問

8 Oを原点とする座標平面上を動く点Pの時刻tにおける座標$\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$が

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

で与えられている．

(1) 時刻tにおける点Pの速度ベクトル$\overrightarrow{v_1}(t) = (x'(t),\ y'(t))$は，ある$2 \times 2$行列$A$によって

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

と表すことができる．この行列Aを求めよ．

(2) Pの各座標の時刻tによるn次導関数を成分とするベクトルを$\overrightarrow{v_n}(t) = (x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t))$とおく．このとき，$n \geqq 1$に対し，

$$\begin{pmatrix} x^{(n)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

となることを，数学的帰納法を用いて示せ．

(3) $\overrightarrow{v_{2013}}(\pi)$を求めよ．