

2014年第3問

3 $0 \leq t \leq 2\pi$ とする. 座標平面上の2点 $P(2\cos t, 2\sin t)$, $Q(\sin 2t, \cos 2t)$ に対して, 以下の問いに答えよ.

- (1) PQ^2 を t を用いて表せ.
 (2) PQ の最大値と, そのときの t の値を求めよ.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad PQ^2 &= (2\cos t - \sin 2t)^2 + (2\sin t - \cos 2t)^2 \\
 &= 4\cos^2 t - 4\sin 2t \cos t + \sin^2 2t + 4\sin^2 t - 4\cos 2t \sin t + \cos^2 2t \\
 &= 5 - 4(\sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t) \\
 &= \underline{5 - 4 \sin 3t} \quad //
 \end{aligned}$$

(2) (1) より, PQ^2 が最大となるのは, $\sin 3t = -1$ のとき.

$0 \leq t \leq 2\pi$ より, $0 \leq 3t \leq 6\pi$ なので, $3t = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi$ のとき.

すなわち, $t = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

$\therefore PQ$ の最大値は 3 ($t = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ のとき) //