



2013年医学部第2問

2 動点 P, Q, R は, 時刻  $t = 0$  においてすべて点  $A(3, 0)$  にあり, 原点  $O(0, 0)$  を中心とする半径 3 の円周上を反時計まわりに移動する. 時刻  $t$  において  $\angle AOP = t$ ,  $\angle AOQ = 2t$ ,  $\angle AOR = 3t$  である. 以下,  $t$  は  $0 < t < \pi$  を満たすものとする.

(1) 時刻  $t$  において, 三角形 PQR の面積  $S$  は,

$$S = \boxed{\text{ア}} \sin t - \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \sin(\boxed{\text{エ}} t)$$

と表わせる. 面積  $S$  は  $t = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \pi$  のとき最大値  $\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$  をとる.

(2) 点 R から直線 PQ に下ろした垂線の足を H とする. 時刻  $t$  において, 行列

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{3}{2}t & \sin \frac{3}{2}t \\ -\sin \frac{3}{2}t & \cos \frac{3}{2}t \end{pmatrix}$$

で表わされる 1 次変換により, 点 H は

$$\left( 3 \cos\left(\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} t\right), 3 \sin\left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} t\right) \right)$$

に移動する.  $OH^2$  は  $\cos t = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$  を満たす時刻  $t$  において最大値  $\boxed{\text{チ}} + \boxed{\text{ツ}} \sqrt{\boxed{\text{テ}}}$  をとる.

(3) 時刻  $t$  の変化にともない, 線分 PR の中点が描く軌跡を  $C$  とする. 点 O を極とし, 半直線  $\alpha \vec{OA}$  ( $\alpha \geq 0$ ) を始線としたとき, 曲線  $C$  の極方程式は, 極座標  $(r, \theta)$  を用いて

$$r = \boxed{\text{ト}} \cos\left(\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} \theta\right)$$

と表わされる.