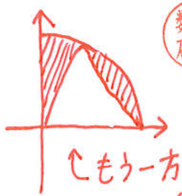
0001872637218999

電気通信大学

2014年 第2問

（注）(5)は日本語が2通りに解釈されるので
おそらく出題者が意図したであろう方を採用した．

数理 石井K



$\boxed{2}$ 2つの関数

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}\ (0 \leqq x \leqq 2), \quad g(y) = \sqrt{4-y^2}\ (0 \leqq y \leqq 2)$$

を考える．座標平面上において，曲線 $y = f(x)$ を C_1 とし，曲線 $x = g(y)$ を C_2 とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) C_1 と C_2 との共有点の座標を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の最大値 M を求めよ．

(3) C_1 と x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(4) 点 $(x,\ y)$ が C_1 上にあるとき，x^2 を y を用いて表せ．

(5) y 軸および 2 曲線 C_1，C_2 で囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

のすべてで

(1) $y^2 = x^2(4-x^2)$ と $x^2 = 4-y^2$ より

$4 - x^2 = 4x^2 - x^4$

$\therefore x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$(x+1)(x-1)(x-2)(x+2) = 0$　$0 \leqq x \leqq 2$ より

$x = 1, 2$

$\therefore \underline{(1, \sqrt{3}),\ (2, 0)}$ //

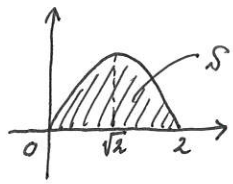
(2) $f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-2x}{\sqrt{4-x^2}}$

$= \dfrac{-2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{\sqrt{4-x^2}}$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	2	↘	0

$\therefore$ 増減表より．$\underline{M = 2}$ //

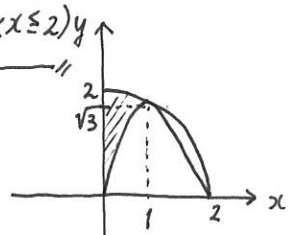
(3) $S = \displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \underline{\frac{8}{3}}$ //



(4) $y = x\sqrt{4-x^2}$ より $y^2 = x^2(4-x^2)$　$\therefore x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$

$\therefore x^2 = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4y^2}}{2} = 2 \pm \sqrt{4-y^2}$

$\therefore x^2 = \begin{cases} 2-\sqrt{4-y^2} & (0 \leqq x \leqq \sqrt{2}) \\ 2+\sqrt{4-y^2} & (\sqrt{2} < x \leqq 2) \end{cases}$ //



(5) $V = \pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} (2-\sqrt{4-y^2})\,dy + \pi\int_{\sqrt{3}}^2 4-y^2\,dy$

$= \pi\Big[2y\Big]_0^{\sqrt{3}} - \pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-y^2}\,dy + \pi\int_{\sqrt{3}}^2 4-y^2\,dy$

$y = 2\sin\theta$ とおく

$dy = 2\cos\theta\,d\theta$

$\begin{array}{c|c} y & 0 \to \sqrt{3} \\ \theta & 0 \to \frac{\pi}{3} \end{array}$

$= 2\sqrt{3}\pi - \pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\cos^2\theta\,d\theta + \pi\left[4y - \frac{1}{3}y^3\right]_{\sqrt{3}}^2$

$= 2\sqrt{3}\pi - 2\pi\left[\theta + \dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left(8 - \dfrac{8}{3} - 4\sqrt{3} + \dfrac{3\sqrt{3}}{3}\right)\pi$

$= 2\sqrt{3}\pi - 2\pi\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\dfrac{16}{3} - 3\sqrt{3}\right)\pi = \underline{-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi + \dfrac{16}{3}\pi - \dfrac{2}{3}\pi^2}$ //