0002229360777999

2016年 第3問

数理 石井K

3 自然数aに対して

$$S(a)=\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 和$S(a)$を求めよ．

(2) $S(a)$が整数となる自然数aを小さい順に並べた数列を

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

とする．一般項a_nを求めよ．

(3) (2)の数列$\{a_n\}$について，a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を4で割った余りは0か3であることを示せ．

(4) (2)の数列$\{a_n\}$と自然数Nに対して和$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}$を求めよ．

(1) $S(a)=\displaystyle\sum_{k=1}^{a}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{a}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=\underline{\sqrt{a+1}-1}$ //

(2) (1)より，$\sqrt{a+1}-1=m$ (m：整数) とおくと．$\sqrt{a+1}=m+1$

両辺2乗して整理すると，$a=m^2+2m$

$a_1=3$ であることを考えて，$\underline{a_n=n^2+2n\ (n=1,2,3,\cdots)}$ //

(3) (i) $n=2k$ ($k=1,2,\cdots$) のとき．

$a_n=(2k)^2+2\cdot 2k$

$=4(k^2+k)$

∴ 4で割った余りは0

(ii) $n=2k-1$ ($k=1,2,\cdots$) のとき

$a_n=(2k-1)^2+2(2k-1)$

$=4(k^2-1)+3$

∴ 4で割った余りは3

(i),(ii)より，a_nを4で割った余りは0または3 ▨

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)}$

$=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{N-1}}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{N}}-\frac{1}{N+2}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{N+1}-\dfrac{1}{N+2}\right)$

$=\underline{\dfrac{N(3N+5)}{4(N+1)(N+2)}}$ //