2016年 理系 第4問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{4}$ $x \geqq 1$ で定義された関数

$$f(x)=\frac{\log x}{x^2}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ．

(2) (1)で求めた x の値を a とする．曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=a$ で囲まれた図形を D とする．D の面積を求めよ．

(3) (2)の図形 D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(1) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\log x\cdot 2x}{x^4}$

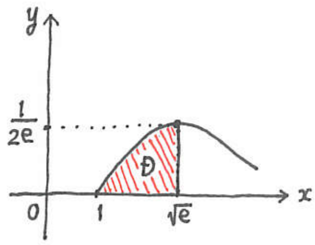
$=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2e}$	↘

$\therefore$ $f'(x)=0$ となるのは，$x=\sqrt{e}$ のとき．

$f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}$

$\therefore$ 最大値 $\dfrac{1}{2e}$ ($x=\sqrt{e}$ のとき)



(2) Dの面積をSとおくと，

$S=\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x^2}\,dx$

$=\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}\left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx$

$=\displaystyle\left[-\frac{1}{x}\cdot\log x\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}-\frac{1}{x^2}\,dx$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\cdot\dfrac{1}{2}-\left[\dfrac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{e}}$

$=1-\dfrac{3}{2\sqrt{e}}$

(3) (バウムクーヘン積分による解法)

$V=2\pi\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}x\cdot\frac{\log x}{x^2}\,dx$

$=2\pi\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)'\log x\,dx$

$=\pi\left[(\log x)^2\right]_1^{\sqrt{e}}$

$=\dfrac{\pi}{4}$

バウムクーヘン積分

$f(x)\geqq 0$ ($a\leqq x\leqq b$) のとき，

$y=f(x)$ のグラフ，x軸，$x=a$，$x=b$

で囲まれた部分をy軸のまわりに1回転してできる

回転体の体積 V は，

$V=2\pi\displaystyle\int_a^b x f(x)\,dx$

0002255724477999

熊本大学

2016年 医学部（医学科） 第2問　　2枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{2}$ $x \geqq 1$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

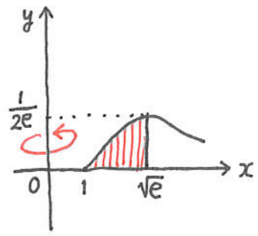
について，以下の問いに答えよ．

(1) $x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ．

(2) (1) で求めた x の値を a とする．曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$，$x = a$ で囲まれた図形を D とする．D の面積を求めよ．

(3) (2) の図形 D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(3) (別解)



$$V = (\text{円柱}) - \int_0^{\frac{1}{2e}} \pi x^2 \, dy$$

$$= \pi(\sqrt{e})^2 \cdot \frac{1}{2e} - \pi \int_1^{\sqrt{e}} x^2 \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \pi \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1 - 2\log x}{x} \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \pi \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} \, dx + 2\pi \int_1^{\sqrt{e}} (\log x)' \log x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \pi \Big[\log x \Big]_1^{\sqrt{e}} + \pi \Big[(\log x)^2 \Big]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{4}} \,/\!/$$