熊本大学

2015年 理系 第2問

$\boxed{2}$ p, q, rを実数とする．空間内の3点A(1, p, 0)，B(q, 1, 1)，C(-1, -1, r)が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ．ただし，Oを原点とする．

(1) pは1でも-1でもないことを示せ．

(2) q, rをpを用いて表せ．

(3) p', q', r'を実数とし，空間内の3点をA′(1, p', 0)，B′(q', 1, 1)，C′(-1, -1, r')とする．ベクトル$\overrightarrow{OA'}$，$\overrightarrow{OB'}$，$\overrightarrow{OC'}$がいずれもベクトル$\overrightarrow{AB}$に垂直であるとき，p', q', r'をpを用いて表せ．

(4) (3)における3点A′，B′，C′は一直線上にないことを示せ．

(1) $\overrightarrow{AB}=(q-1,\ 1-p,\ 1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,\ -1-p,\ r)$

3点A, B, Cが一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ となる実数kが存在する.

よって,

$$\begin{cases} q-1=-2k & \cdots ① \\ 1-p=(-1-p)k & \cdots ② \\ 1=rk & \cdots ③ \end{cases}$$

$p=1$ と仮定すると, ②より, $0=-2k$ $\therefore k=0$ これは③に矛盾する.

$p=-1$ と仮定すると, ②より, $2=0$ $\therefore$ 矛盾する.

以上より, $p \neq \pm 1$ ■

(2) $p \neq -1$ のとき, ②, ③より, $1-p=(-1-p)\cdot\dfrac{1}{r}$ $\therefore r=\dfrac{p+1}{p-1}$

これと①より, $q-1=-2\cdot\dfrac{p-1}{p+1}$ $\therefore q=\dfrac{3-p}{p+1}$

以上より, $\underline{q=\dfrac{3-p}{1+p},\ r=\dfrac{p+1}{p-1}\ (ただし, p \neq \pm 1)}$ //

(3) $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{AB}=q-1+p'-pp'$ $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より. $p'=\dfrac{1-q}{1-p}=-\dfrac{2}{1+p}$

$\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{AB}=qq'-q'+1-p+1$ $\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より. $q'=\dfrac{p-2}{q-1}=\dfrac{p^2-p-2}{2(1-p)}$

$\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{AB}=-q+1-1+p+r'$ $\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より. $r'=q-p=-\dfrac{p^2+2p-3}{1+p}$

以上より, $\underline{p'=-\dfrac{2}{1+p},\ q'=\dfrac{p^2-p-2}{2(1-p)},\ r'=-\dfrac{p^2+2p-3}{1+p}}$ //

(4) 3点A′, B′, C′が一直線上にあると仮定すると, (2)より, $q'=\dfrac{3-p'}{1+p'}$

(3)の結果を代入して整理すると, $p^2+5p+8=0$

これは, $\left(p+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ $\therefore$ 実数解をもたず矛盾 $\therefore$ 3点A′, B′, C′は一直線上にない ■