2015年 医学部（医学科） 第4問

1枚目/2枚

数理 石井K

4 rを正の実数とする．数列$\{a_n\}$を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a_{n+1}-a_n$を求めよ．

(2) $\{a_n\}$の一般項を求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n$をrを用いて表せ．

(4) (3)で求めたrの式を$f(r)$とおく．$\lim_{r\to+0} rf(r)$を求めよ．

(1) $a_{n+1}-a_n = \int_0^{(n+1)\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx - \int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx$

$= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx$

ここで，$t=x-n\pi$とおいて置換積分する．$dt=dx$，$\begin{array}{c|c} x & n\pi \to (n+1)\pi \\ \hline t & 0 \to \pi \end{array}$

$$a_{n+1}-a_n = \int_0^{\pi} e^{-r(t+n\pi)}|\sin(t+n\pi)|\,dt$$

$$= e^{-rn\pi}\int_0^{\pi} e^{-rt}|\sin t\cdot(-1)^n|\,dt$$

$$= e^{-rn\pi}\int_0^{\pi} e^{-rt}\sin t\,dt \quad (\because 0\leqq t\leqq \pi \text{ において，} \sin t \geqq 0 \text{ より})$$

ここで，$I(r)=\int_0^{\pi} e^{-rt}\sin t\,dt$とおくと，

$$I(r) = \int_0^{\pi} e^{-rt}(-\cos t)'\,dt$$

$$= \left[e^{-rt}\cdot(-\cos t)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} re^{-rt}\cos t\,dt$$

$$= e^{-r\pi}+1-\int_0^{\pi} re^{-rt}(\sin t)'\,dt$$

$$= e^{-r\pi}+1-\left[re^{-rt}\sin t\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} -r^2e^{-rt}\sin t\,dt$$

$$= e^{-r\pi}+1-r^2I(r)$$

$$\therefore (r^2+1)I(r) = e^{-r\pi}+1$$

$$\therefore I(r) = \frac{1+e^{-r\pi}}{1+r^2}$$

$$\therefore \underline{a_{n+1}-a_n = \frac{e^{-rn\pi}(1+e^{-r\pi})}{1+r^2}}_{//}$$

2015 年 医学部（医学科）第 4 問　2 枚目/2 枚

数理 石井K

4　r を正の実数とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ．

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を r を用いて表せ．

(4) (3) で求めた r の式を $f(r)$ とおく．$\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた式は $n=0$ のときも成り立つので

$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$= \frac{1+e^{-r\pi}}{1+r^2}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-r\pi})^k \quad (\because a_0=0 \text{ より})$$

$$= \frac{1+e^{-r\pi}}{1+r^2}\cdot\frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}}$$

$$= \underline{\frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}}\,//$$

(3) $r>0$ より，$0<e^{-r\pi}<1$　$\therefore$ $n\to\infty$ のとき，$e^{-rn\pi}\to 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+e^{-r\pi}}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}$$

$$= \underline{\frac{e^{r\pi}+1}{(1+r^2)(e^{r\pi}-1)}}\,//$$

(4) $$\lim_{r\to+0} rf(r) = \lim_{r\to+0}\frac{e^{r\pi}+1}{1+r^2}\cdot\frac{r\pi}{e^{r\pi}-1}\cdot\frac{1}{\pi}$$

ここで，$$\lim_{r\to+0}\frac{r\pi}{e^{r\pi}-1} = \lim_{h\to+0}\frac{h}{e^h-1} \quad (\because h=r\pi \text{ とおいた})$$

$$= \lim_{h\to+0}\left(\frac{e^h-e^0}{h-0}\right)^{-1}$$

$$= 1$$

$$\therefore \lim_{r\to+0} rf(r) = \underline{\frac{2}{\pi}}\,//$$