

2015年医学部（医学科）第4問

1枚目/2枚

4 r を正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx} |\sin x| dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。
- (2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を r を用いて表せ。
- (4) (3)で求めた r の式を $f(r)$ とおく。 $\lim_{r \rightarrow +0} rf(r)$ を求めよ。

$$(1) a_{n+1} - a_n = \int_0^{(n+1)\pi} e^{-rx} |\sin x| dx - \int_0^{n\pi} e^{-rx} |\sin x| dx \\ = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-rx} |\sin x| dx$$

ここで、 $t = x - n\pi$ とおいて置換積分する。 $dt = dx$, $\frac{x}{t} \parallel \frac{n\pi}{0 \rightarrow \pi}$

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^{\pi} e^{-r(t+n\pi)} |\sin(t+n\pi)| dt \\ = e^{-rn\pi} \int_0^{\pi} e^{-rt} |\sin t \cdot (-1)^n| dt \\ = e^{-rn\pi} \int_0^{\pi} e^{-rt} \sin t dt \quad (\because 0 \leq t \leq \pi \text{において, } \sin t \geq 0 \text{ より})$$

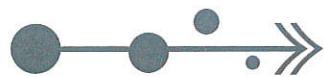
ここで、 $I(r) = \int_0^{\pi} e^{-rt} \sin t dt$ とおくと、

$$I(r) = \int_0^{\pi} e^{-rt} (-\cos t)' dt \\ = [e^{-rt} \cdot (-\cos t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} r e^{-rt} \cos t dt \\ = e^{-r\pi} + 1 - \int_0^{\pi} r e^{-rt} (\sin t)' dt \\ = e^{-r\pi} + 1 - [r e^{-rt} \sin t]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} -r^2 e^{-rt} \sin t dt \\ = e^{-r\pi} + 1 - r^2 I(r)$$

$$\therefore (r^2 + 1) I(r) = e^{-r\pi} + 1$$

$$\therefore I(r) = \frac{1 + e^{-r\pi}}{1 + r^2}$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = \underline{\underline{\frac{e^{-rn\pi} (1 + e^{-r\pi})}{1 + r^2}}} \quad ,$$



2015年医学部(医学科) 第4問

2枚目/2枚

- 4 r を正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx} |\sin x| dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。
- (2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を r を用いて表せ。
- (4) (3)で求めた r の式を $f(r)$ とおく。 $\lim_{r \rightarrow +0} rf(r)$ を求めよ。

(2) (1)で求めた式は $n=0$ のときも成り立つので

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{1+e^{-r\pi}}{1+r^2} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{-rk\pi})^k \quad (\because a_0 = 0 \text{ より}) \\ &= \frac{1+e^{-r\pi}}{1+r^2} \cdot \frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}} \\ &= \frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})} \end{aligned}$$

(3) $r > 0$ より、 $0 < e^{-r\pi} < 1 \quad \therefore n \rightarrow \infty$ のとき、 $e^{-rn\pi} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \frac{1+e^{-r\pi}}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})} \\ &= \frac{e^{r\pi}+1}{(1+r^2)(e^{r\pi}-1)} \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{r \rightarrow +0} rf(r) = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{e^{r\pi}+1}{1+r^2} \cdot \frac{r\pi}{e^{r\pi}-1} \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \lim_{r \rightarrow +0} \frac{r\pi}{e^{r\pi}-1} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{e^h-1} \quad (\because h = r\pi \text{ とおいた}) \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \left(\frac{e^h-1}{h} \right)^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{r \rightarrow +0} rf(r) = \frac{2}{\pi}$$