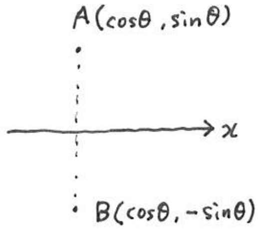
2013年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 座標平面上に点 A$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0<\theta<\pi)$ がある．原点を O とし，x 軸に関して点 A と対称な点を B とする．次の問いに答えよ．



(1) $-1<\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\leqq\dfrac{1}{2}$ となる θ の範囲を求めよ．

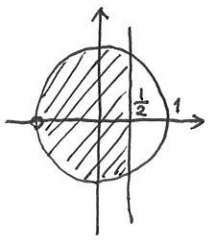
(2) 点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める．点 P から x 軸に下ろした垂線を PQ とする．θ が (1) で求めた範囲を動くとき，△POQ の面積の最大値を求めよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$



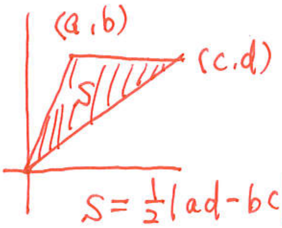
$\therefore -1<\cos 2\theta\leqq\frac{1}{2}$ $(0<2\theta<2\pi)$

$\therefore \frac{\pi}{3}\leqq 2\theta\leqq\frac{5\pi}{3}$ かつ $2\theta\neq\pi$

$\therefore \underline{\frac{\pi}{6}\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\theta\leqq\frac{5\pi}{6}}$ //

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2(\cos\theta,\ \sin\theta)+\frac{1}{2}(\cos\theta,\ -\sin\theta)$

$=\left(\frac{5}{2}\cos\theta,\ \frac{3}{2}\sin\theta\right)$ $\quad\therefore$ Q$\left(\frac{5}{2}\cos\theta,\ 0\right)$



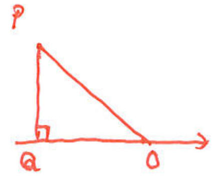
$S=\frac{1}{2}|ad-bc|$ を使った．

$\therefore$ △POQ の面積を $S(\theta)$ とおくと，

$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{15}{4}\sin\theta\cos\theta\right|$

$=\frac{15}{16}|\sin 2\theta|$

今回は直角三角形なので



$0<2\theta<2\pi$ より，$S(\theta)$ の最大値は $\underline{\frac{15}{16}\ \left(\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\right)}$ //

$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sin\theta\cdot\left|\frac{5}{2}\cos\theta\right|$

としてもよいが

絶対値を忘れないこと。