2013年 教育学部（数学・技術・理科）第3問

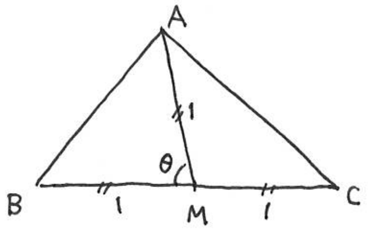
3 △ABCにおいて，辺BCの中点MはAM＝BM＝1を満たす．内積$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$を$t$とする．

(1) tのとり得る値の範囲を求めよ．

(2) △ABCの面積が$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$となるとき，tの値を求めよ．

(3) △ABCの周の長さAB＋BC＋CAの最大値と，そのときのtの値を求めよ．

(1) $\angle BMA = \theta$ とおくと 余弦定理より



$$AB^2 = 2 - 2\cos\theta$$
$$= 4 \cdot \frac{1-\cos\theta}{2}$$
$$= 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$0<\theta<\pi$ より $0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ なので

$\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$ $\therefore AB = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$ また，$\angle ABC = 90^\circ - \dfrac{\theta}{2}$ より

$$t = |\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\left(90^\circ - \frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{\theta}{2}$$
$$= 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$\therefore\ 0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\underline{0<t<4}$ //

(2) $\triangle ABC = \triangle ABM + \triangle AMC$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\theta + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin(180^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{7}}{4} \iff \sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$ このとき $\cos\theta = \pm\dfrac{3}{4}$

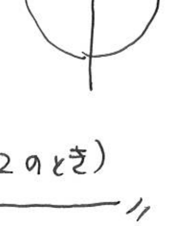
(1) より $t = 4\sin^2\dfrac{\theta}{2} = 4 - 4\cos^2\dfrac{\theta}{2} = 4 - 4\cdot\dfrac{1+\cos\theta}{2}$

$\therefore\ t = 4 - 2\left(1 \pm \dfrac{3}{4}\right)$ $\therefore\ \underline{t = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}}$ //

(3) 余弦定理より $AC^2 = 2 - 2\cos(180^\circ - \theta)$

$$\therefore AC = \sqrt{4\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{4\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore AB + BC + CA = 2\sin\frac{\theta}{2} + 2 + 2\cos\frac{\theta}{2}$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2$$
$$= 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 2$$



$0<\theta<\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3}{4}\pi$

$\therefore$ AB＋BC＋CAの$\underline{\text{最大値は } 2\sqrt{2}+2 \left(\theta = \frac{\pi}{2}\ \text{すなわち}\ t = 2\ \text{のとき}\right)}$ //