



2013年第6問

6 座標平面上で原点  $O$  を中心とする半径  $1$  の円の第  $1$  象限の部分  $C$  とする. 曲線  $y = f(x)$  ( $0 < x < 1$ ) は第  $4$  象限にあり, かつすべての  $x_1$  ( $0 < x_1 < 1$ ) について, 点  $(x_1, f(x_1))$  における接線が  $C$  上の点  $(x_1, y_1)$  における  $C$  の接線と直交しているとする. 曲線  $y = f(x)$  上の動点を  $P$  とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $f'(x)$  を求めよ.
- (2) 点  $P$  における  $y = f(x)$  の接線と  $y$  軸との交点を  $Q$  とするとき, 線分  $PQ$  の長さは常に  $1$  であることを示せ.
- (3)  $x$  軸上と  $y$  軸上に  $2$  辺をもち, 線分  $OP$  を対角線とする長方形の面積を  $S$  とする. 点  $P$  が  $S$  を最大にする位置にあるとき,  $P$  は  $P$  における曲線の接線と座標軸が交わってできる  $2$  点の midpoint であることを示せ.
- (4)  $f(x)$  を求めよ. ただし,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0$  であるとする.