0000204095979999

岡山県立大学

2011年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = \frac{2}{3}$，$a_{n+1} = \frac{2-a_n}{3-2a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たしている．次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3 を求めよ．

(2) 一般項 a_n を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ．

(3) $a_{n+1} - a_n < \frac{1}{5000}$ を満たす最小の n を求めよ．

(1) $a_2 = \frac{2-a_1}{3-2a_1} = \frac{2-\frac{2}{3}}{3-\frac{4}{3}} = \underline{\frac{4}{5}}$ //　　$a_3 = \frac{2-a_2}{3-2a_2} = \frac{2-\frac{4}{5}}{3-\frac{8}{5}} = \underline{\frac{6}{7}}$ //

(2) $a_n = \frac{2n}{2n+1}$ と推定，数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき．$a_1 = \frac{2}{3}$ となり成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$a_k = \frac{2k}{2k+1}$

∴漸化式より．$a_{k+1} = \frac{2-a_k}{3-2a_k}$

$$= \frac{2-\frac{2k}{2k+1}}{3-\frac{4k}{2k+1}}$$

$$= \frac{2(2k+1)-2k}{3(2k+1)-4k}$$

$$= \frac{2(k+1)}{2(k+1)+1}$$

∴ $n = k+1$ のときも成り立つ

(i),(ii)より．すべての自然数 n について成り立つ ■

(3) (2)より．

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{2n+3} - \frac{2n}{2n+1} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\therefore \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} < \frac{1}{5000} \iff (2n+1)(2n+3) > 10000$$

単調増加．

$N = 2n+2$ とおくと，$\iff N^2 > 10001 = 10^4 + 1$

$\therefore N \geqq 101$　$\therefore 2n+2 \geqq 101$　$2n \geqq 99$

$\therefore \underline{n = 50}$ //