



2016年人文学部第3問

1 枚目 / 2 枚目

3 数列 $\{x_n\}$ は

$$(n-1)x_{n+2} - (n^2 + n - 1)x_{n+1} + n^2x_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする。

- (1) x_2 を x_1 で表せ。また x_4 を x_1 と x_3 で表せ。
 (2) $y_n = x_{n+2} - x_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。 y_n を y_1 と n で表せ。
 (3) 数学的帰納法で $\sum_{k=1}^n k(k!) = (n+1)! - 1$ を示せ。
 (4) x_{n+2} ($n = 2, 3, 4, \dots$) を x_1, x_3 と n で表せ。

(1) 与式に $n=1$ を代入して、 $-x_2 + x_1 = 0 \quad \therefore \underline{x_2 = x_1}$ //

また、 $n=2$ を代入して、 $x_4 - 5x_3 + 4x_2 = 0 \quad \therefore \underline{x_4 = 5x_3 - 4x_1}$ //

(2) $(n-1)x_{n+2} - (n-1)x_{n+1} - n^2x_{n+1} + n^2x_n = 0$

$$\therefore (n-1)(x_{n+2} - x_{n+1}) = n^2(x_{n+1} - x_n)$$

$$\therefore n \geq 2 \text{ に対して, } (n-1)y_n = n^2y_{n-1}$$

$$\therefore y_n = \frac{n^2}{n-1} y_{n-1}$$

$$= \frac{n^2}{n-1} \cdot \frac{(n-1)^2}{n-2} y_{n-2}$$

$$= \frac{n^2(n-1)^2 \cdots 2^2}{(n-1)(n-2) \cdots 1} y_1$$

$$= \frac{n! \cdot n!}{(n-1)!} y_1$$

$$= \underline{n(n!)y_1} \quad \text{これは } n=1 \text{ のときも成り立つ} //$$

(3) (i) $n=1$ のとき。

$$(\text{左辺}) = 1 \cdot 1! = 1, \quad (\text{右辺}) = 2! - 1 = 1$$

よって、成り立つ

(ii) $n=m$ のとき成り立つと仮定すると、

$$\sum_{k=1}^m k(k!) = (m+1)! - 1$$

両辺に $(m+1)\{(m+1)!\}$ を加えて、

2 枚目へつづく



2016年人文学部第3問

2枚目 / 2枚

3 数列 $\{x_n\}$ は

$$(n-1)x_{n+2} - (n^2 + n - 1)x_{n+1} + n^2x_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする.

- (1) x_2 を x_1 で表せ. また x_4 を x_1 と x_3 で表せ.
 (2) $y_n = x_{n+2} - x_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく. y_n を y_1 と n で表せ.
 (3) 数学的帰納法で $\sum_{k=1}^n k(k!) = (n+1)! - 1$ を示せ.
 (4) x_{n+2} ($n = 2, 3, 4, \dots$) を x_1, x_3 と n で表せ.

(3) のつづき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k(k!) &= (m+1)! - 1 + (m+1)\{(m+1)!\} \\ &= (m+1)! \cdot (1+m+1) - 1 \\ &= (m+2)! - 1 \end{aligned}$$

 $\therefore n = m+1$ のとき 成り立つ(i), (ii) より, すべての自然数 n に対して, $\sum_{k=1}^n k(k!) = (n+1)! - 1$ が成り立つ \square

(4) (2), (3) より,

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= x_2 + \sum_{k=1}^n y_k \quad (n \geq 2) \\ &= x_1 + y_1 \sum_{k=1}^n k(k!) \\ &= x_1 + (x_3 - x_2) \cdot \{(n+1)! - 1\} \\ &= \underline{x_1 + (x_3 - x_1) \cdot \{(n+1)! - 1\}} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) // \end{aligned}$$