# 高知大学

2014年第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $k$は1以上の整数であるとする．連続した整数が書かれた$2^k-1$枚のカードが1組あり，その中に無作為に選ばれた当たりが一枚だけ含まれているとする．次のようなルールで当たりのカードにたどりつくことを考える．

（i）カードのうち，ちょうど真ん中の整数の書かれたカードをひく．それが当たりなら終了する．

（ii）ハズレならば，真ん中の整数より大きいカードの組と小さいカードの組に分ける．

（iii）当たりのカードの含まれた組を教えてもらい，その組に対して，（i）に戻って繰り返す．

このルールのもとで，ひいたカードの枚数の期待値を$E_k$とおく．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $E_1$，$E_2$，$E_3$，$E_4$を求めよ．

(2) $E_{k+1}$を$E_k$を用いて表せ．

(3) $d_k=E_k-\dfrac{1}{2^k}(E_k+1)$とおくとき，$d_k$のみたす漸化式を求めよ．

(4) $E_k$を求めよ．

(5) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}(E_k-k)$を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2^k}=0$であることを用いてもよい．

(1) $E_1=1$，$E_2=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3}=\underline{\frac{5}{3}}$ //

$E_3=1\times\frac{1}{7}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{4}{7}=\underline{\frac{17}{7}}$ //

$E_4=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{2}{15}+3\times\frac{4}{15}+4\times\frac{8}{15}=\underline{\frac{49}{15}}$ //

(2) $k=n+1$のとき．最初にはずれてからは$k=n$のときの期待値に1を加えたものに等しくなるから．

$$E_{k+1}=1\times\frac{1}{2^{k+1}-1}+(E_k+1)\times\frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1}$$
$$=\underline{\frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1}E_k+1}\ //$$

(3) $d_k=E_k-\frac{1}{2^k}(E_k+1)\iff E_k=\frac{2^kd_k+1}{2^k-1}$ これを代入して

$$\frac{2^{k+1}d_{k+1}+1}{2^{k+1}-1}=\frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1}\cdot\frac{2^kd_k+1}{2^k-1}+1\quad\therefore\ \underline{d_{k+1}=d_k+1}\ //$$

(4) $\{d_k\}$は初項$E_1-\frac{1}{2}(E_1+1)=0$，公差1の等差数列．

$\therefore d_k=k-1\quad\therefore E_k-\frac{1}{2^k}(E_k+1)=k-1\quad\therefore\ \underline{E_k=\dfrac{(k-1)2^k+1}{2^k-1}}$ //

つづき，

(5) $$\lim_{k\to\infty}(E_k-k)=\lim_{k\to\infty}\frac{(1-2^k)+k}{2^k-1}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{2^k-1}-1\right)$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\frac{k}{2^k}}{1-\frac{1}{2^k}}-1\right)$$
$$=\underline{-1}\ //$$