2016年 教育学部 第2問

2 次の各問いに答えよ．

(1) 整式 $P(x)$ を 0 でない整式 $Q(x)$ で割った余りを $R(x)$ とおく．方程式 $P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解は方程式 $Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解であることを示せ．また逆に方程式 $Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解は方程式 $P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解であることを示せ．

(2) 整式 $P(x)$, $Q(x)$ を

$$P(x)=x^4+2x^3+x^2-1,\quad Q(x)=x^3+2x^2-1$$

とおく．方程式 $P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解をすべて求めよ．

(1) $P(x)=Q(x)\cdot S(x)+R(x)$ …① と表せる．ただし，$S(x)$ は商である

$P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解を α とおくと，

$P(\alpha)=Q(\alpha)=0$ …②

$x=\alpha$ を①に代入すると，$P(\alpha)=Q(\alpha)\cdot S(\alpha)+R(\alpha)$ …③

②,③より，$R(\alpha)=0$

∴ α は $Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解である

逆に，$Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解を β とおくと，

$Q(\beta)=R(\beta)=0$ …④

$x=\beta$ を①に代入すると，$P(\beta)=Q(\beta)\cdot S(\beta)+R(\beta)$ …⑤

④,⑤より，$P(\beta)=0$

∴ β は $P(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解である ▨

(2) (1)において，$P(x)=x^4+2x^3+x^2-1$，$Q(x)=x^3+2x^2-1$ とおくと，

$S(x)=x$ となり，$R(x)=x^2+x-1$

であるから，求める共通解は，$Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解である

$Q(x)=0 \iff (x+1)(x^2+x-1)=0$

∴ $x^2+x-1=0$ を解くと，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

∴ 共通解は，$\underline{x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$ //