

2010年医学部第3問

3 座標平面上に $P_0(1, 0)$ を取る. P_0 を通り y 軸と平行な直線と曲線 $C: y = \frac{5x+3}{x+3}$ との交点を $P_1(x_1, y_1)$ とする. 次に, P_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 $l: y = x$ との交点を $P_2(x_2, y_2)$ とする. さらに, P_2 を通り y 軸と平行な直線と C との交点を $P_3(x_3, y_3)$ とし, P_3 を通り x 軸に平行な直線と直線 l との交点を $P_4(x_4, y_4)$ とする. 以下この操作を続けて点列 $P_5(x_5, y_5), P_6(x_6, y_6), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$ を定める. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 曲線 C のグラフを描け. また, その漸近線を求めよ.
- (2) $z_n = \frac{x_{2n-1} - 3}{x_{2n-1} + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと, $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ を求めよ.
- (3) 数列 $\{z_n\}$ はどのような数列か. また, その一般項 z_n を求めよ.
- (4) 数列 $\{x_n\}$ の一般項 x_n を求めよ. さらに, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ.